1977 年京大文 $\boxed{3}$

n 個の自然数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の中に、少なくとも $n-1$ 個の、相違なる値が含まれる。

ｉ）$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ が、すべて相違なる値であるとき

このような選び方の総数は、$1,\ 2,\ \cdots,\ m$ の中から n 個の自然数を選んで並べる順列の総数に等しいから

$$ {}_mP_n = \frac{m!}{(m-n)!} $$

ｉｉ）$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ のうち、いずれか 2 個の値が一致し、他はすべて相違なる値であるとき

一致する 2 個の選び方は　${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 通り　一致する 2 個がとる値は　m 通り

残りの $n-2$ 個の値の選び方は、$m-1$ 個の自然数から $n-2$ 個を選ぶから　${}_{m-1}P_{n-2} = \dfrac{(m-1)!}{(m-n+1)!}$

このような選び方の総数は　$\dfrac{n(n-1)}{2} \times m \times \dfrac{(m-1)!}{(m-n+1)!} = \dfrac{n(n-1)\cdot m!}{2(m-n+1)!}$

求める選び方の総数は

$$ \frac{m!}{(m-n)!} + \frac{n(n-1)\cdot m!}{2(m-n+1)!} = \frac{m!}{2(m-n+1)!}\cdot\left\{2(m-n+1)+n(n-1)\right\} = \frac{(n^2-3n+2m+2)\cdot m!}{2(m-n+1)!} \quad \text{——①} $$

ここで、$n=1$ のとき、選び方は m 通り。

$n=2$ のとき、2 数は一致してもよいから、選び方は $m \times m = m^2$ 通り。

①に $n=1,\ 2$ を代入すると、一致することがわかる。

$m>n$ である自然数 n について、求める選び方の総数は　$\dfrac{(n^2-3n+2m+2)\cdot m!}{2(m-n+1)!}$ ……(答)

※組み合わせではなく、順列の問題であることに注意。

　例えば、$(a_1,\ a_2)=(1,\ 2)$ と $(a_1,\ a_2)=(2,\ 1)$ は、違う選び方と考える。