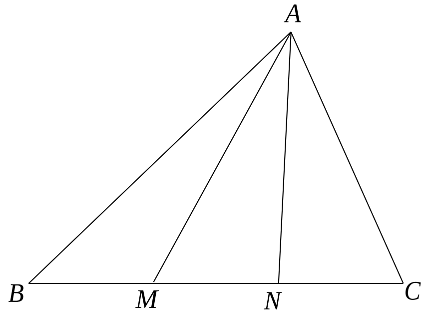
1977 年京大文 $\boxed{6}$

(i)



M は BC を $1:2$ に内分するので　$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

N は BC を $2:1$ に内分するので　$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\frac{4}{9}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\left|\overrightarrow{AN}\right|^2=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{4}{9}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2-\left|\overrightarrow{AN}\right|^2=\frac{1}{3}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)>0\quad \left|\overrightarrow{AM}\right|^2>\left|\overrightarrow{AN}\right|^2\quad \therefore AM>AN$$ ……(答)

(ii)

△ ABC の外接円の半径を R とすると、正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle B}=2R\quad \sin\angle C=\frac{AB}{2R},\ \sin\angle B=\frac{AC}{2R}$$ $AB>AC$ より　$\therefore \sin\angle C>\sin\angle B$ ――①

△ ABM，△ ACN の外接円の半径を、それぞれ $R',\ R''$ とすると、正弦定理より

$$\frac{AM}{\sin\angle B}=2R',\ \frac{AN}{\sin\angle C}=2R''\quad R'=\frac{AM}{2\sin\angle B},\ R''=\frac{AN}{2\sin\angle C}$$

(i)より $AM>AN$、①より $\dfrac{1}{\sin\angle B}>\dfrac{1}{\sin\angle C}$ であるから　$\dfrac{AM}{2\sin\angle B}>\dfrac{AN}{2\sin\angle C}$　$\therefore R'>R''$ ――②

正弦定理より　$\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}=2R',\ \dfrac{NC}{\sin\angle CAN}=2R''$

$BM=NC=\dfrac{1}{3}BC$ であるから　$\sin\angle BAM=\dfrac{BC}{6R'},\ \sin\angle CAN=\dfrac{BC}{6R''}$

②より $\dfrac{1}{R'}<\dfrac{1}{R''}$ であるから　$\therefore \sin\angle BAM<\sin\angle CAN$ ――③

ここで、$\angle BAM+\angle CAN<\angle BAC<180°$ であるから、少なくとも $\angle BAM, \angle CAN$ のうち一方は鋭角である。

$\angle CAN$ が鋭角であるとき、③が成り立つ条件は　$\angle BAM<\angle CAN<90°$ または $180°-\angle CAN<\angle BAM$

$180°-\angle CAN<\angle BAM$ のとき、$\angle CAN+\angle BAM>180°$ となるから、適するのは　$\therefore \angle BAM<\angle CAN<90°$

$\angle BAM$ が鋭角であるとき、③が成り立つ条件は　$\therefore \angle BAM<\angle CAN<180°-\angle BAM$

いずれにしても　$\therefore \angle BAM<\angle CAN$ ……(答)

※ $\sin\angle BAM<\sin\angle CAN$ を示すには、△ ABM と△ ACN の面積が等しいことに着目すると簡単。