1977 年京大理$\boxed{3}$

$f^{(0)}(x)=\sin x \quad f^{(1)}(x)=\cos x \quad f^{(2)}(x)=-\sin x \quad f^{(3)}(x)=-\cos x \quad f^{(4)}(x)=\sin x=f^{(0)}(x)$

m を自然数として、 $f^{(4m-3)}(x)=\cos x,\ f^{(4m-2)}(x)=-\sin x,\ f^{(4m-1)}(x)=-\cos x,\ f^{(4m)}(x)=\sin x$ である。

$g(x)=xf^{(n-1)}(x),\ h(x)=f^{(n)}(x)$ とし、 $y=g(x),\ y=h(x)$ の交点 P の x 座標を、 p とすると

$n=4m-3$ のとき

$g(x)=x\sin x,\ h(x)=\cos x \quad g'(x)=\sin x+x\cos x,\ h'(x)=-\sin x$

$g(p)=h(p)$ より　$p\sin p=\cos p \quad \therefore g'(p)\cdot h'(p)=-\sin^2 p-p\sin p\cos p=-\sin^2 p-\cos^2 p=-1$

$n=4m-2$ のとき

$g(x)=x\cos x,\ h(x)=-\sin x \quad g'(x)=\cos x-x\sin x,\ h'(x)=-\cos x$

$g(p)=h(p)$ より　$p\cos p=-\sin p \quad \therefore g'(p)\cdot h'(p)=-\cos^2 p+p\cos p\sin p=-\cos^2 p-\sin^2 p=-1$

$n=4m-1$ のとき

$g(x)=-x\sin x,\ h(x)=-\cos x \quad g'(x)=-\sin x-x\cos x,\ h'(x)=\sin x$

$g(p)=h(p)$ より　$p\sin p=\cos p \quad \therefore g'(p)\cdot h'(p)=-\sin^2 p-p\sin p\cos p=-\sin^2 p-\cos^2 p=-1$

$n=4m$ のとき

$g(x)=-x\cos x,\ h(x)=\sin x \quad g'(x)=-\cos x+x\sin x,\ h'(x)=\cos x$

$g(p)=h(p)$ より　$p\cos p=-\sin p \quad \therefore g'(p)\cdot h'(p)=-\cos^2 p+p\cos p\sin p=-\cos^2 p-\sin^2 p=-1$

以上により、いずれにしても、 P における $C_1,\ C_2$ の接線は、互いに直交する。（証明終）