1978年京大文 $\boxed{5}$

（i）

（必要性）

すべての整数kについて、$f(k)$が整数であるとき、$f(0)$は整数である。

いかなる整数$l,\ m$についても、$f(l)-f(m)$は、整数同士の差であるから、整数である。

したがって、すべての整数kについて、$f(k)-f(k-1)$は整数となる。

（十分性）

$f(0)$が整数であって、すべての整数kについて、$f(k)-f(k-1)$は整数となるとき

$f(1)-f(0)$は整数であるから、$\{f(1)-f(0)\}+f(0)=f(1)$は、整数である。

$f(2)-f(1)$は整数であるから、$\{f(2)-f(1)\}+f(1)=f(2)$は、整数である。

以降、$f(3),\ f(4),\ f(5),\cdots$は、整数であることが順次示される。

$f(0)-f(-1)$は整数であるから、$f(0)-\{f(0)-f(-1)\}=f(-1)$は、整数である。

$f(-1)-f(-2)$は整数であるから、$f(-1)-\{f(-1)-f(-2)\}=f(-2)$は、整数である。

以降、$f(-3),\ f(-4),\ f(-5),\cdots$は、整数であることが順次示される。

すべての整数kについて、$f(k)$は整数である。

以上により示された。（証明終）

（ii）

（i）より、$f(0)=c$は、整数である。$g(k)=f(k)-f(k-1)$とすると、

すべての整数kについて、$g(k)=a(2k-1)+b=2ak+b-a$は、整数であるから、$g(0)=b-a$は、整数である。

$g(k)-g(k-1)=2a$は、整数である。

これより、$l,\ m,\ n$を整数として、$2a=l,\ b-a=m,\ c=n$とおくと、$a=\dfrac{l}{2},\ b=\dfrac{l}{2}+m,\ c=n$と書ける。

このとき、$f(k)=\dfrac{l}{2}k^2+\left(\dfrac{l}{2}+m\right)k+n=\dfrac{k(k+1)}{2}l+km+n$である。

$k(k+1)$は連続した整数の積であり、2で割り切れるから、$\dfrac{k(k+1)}{2}$は整数である。

したがって、すべての整数kについて、$f(k)$は整数となる。

求める必要十分条件は、整数$l,\ m,\ n$によって、$a=\dfrac{l}{2},\ b=\dfrac{l}{2}+m,\ c=n$と書けることである。……（答）