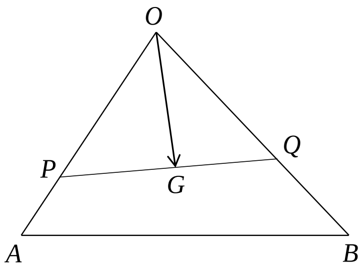
1978年京大理 $\boxed{2}$ 文 $\boxed{2}$ 共通

(i)



G は△OAB の重心であるから　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ――①

G は線分 PQ の内分点であるから、$0<t<1$ である実数 t を用いて、

$\overrightarrow{OG}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}$ と書けるので　$\overrightarrow{OG}=(1-t)h\overrightarrow{OA}+tk\overrightarrow{OB}$ ――②

①、②を比較すると　$(1-t)h=\frac{1}{3},\ tk=\frac{1}{3}$　$3(1-t)=\frac{1}{h},\ 3t=\frac{1}{k}$

辺々足すと　$\therefore \frac{1}{h}+\frac{1}{k}=3$　（証明終）

(ii)

(i)で示した結果より　$3hk=h+k$　$(3h-1)k=h$　$1\geqq k$ であるから　$3h-1\geqq h$　$2h\geqq 1$　$\therefore h\geqq\frac{1}{2}$

対称性より、$\frac{1}{2}\leqq h\leqq 1,\ \frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ である。

$\angle AOB=\theta$ とすると、$S=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta$ であり、$T=\frac{1}{2}OP\cdot OQ\sin\theta=hk\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta=hkS$ である。

hk の最大値、最小値を調べる。$k=\frac{h}{3h-1}$ より　$hk=\frac{h^2}{3h-1}$

$f(h)=\frac{h^2}{3h-1}$ とし、$\frac{1}{2}\leqq h\leqq 1$ における増減を調べる。$f'(h)=\frac{2h(3h-1)-3h^2}{(3h-1)^2}=\frac{h(3h-2)}{(3h-1)^2}$

$f(h)$ の増減は右の通り。$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=\frac{1}{2}$ であるから

h	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(h)$		−	0	+	
$f(h)$		↘		↗	

$\therefore \frac{4}{9}S\leqq T\leqq\frac{1}{2}S$　（証明終）

左側の等号は $h=k=\frac{2}{3}$ のとき、右側の等号は $(h,\ k)=\left(\frac{1}{2},1\right),\left(1,\frac{1}{2}\right)$ のとき成立。