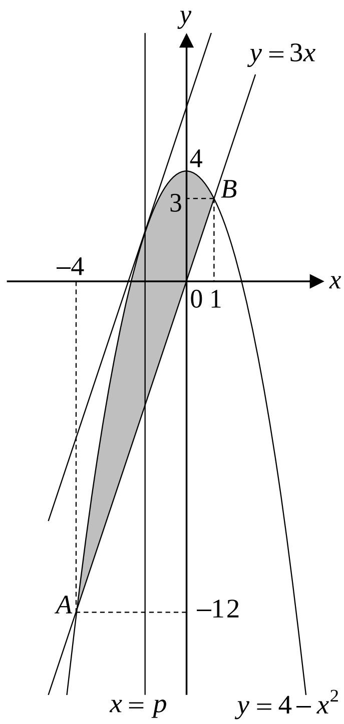
1978年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通



(i)

$4-x^2=3x$ とすると　$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)=0$　$\therefore x=-4,\ 1$

$A(-4,\ -12),\ B(1,\ 3)$ とする。△ABP の面積が最大になるのは、P が AB から最も遠いときである。放物線に AB と平行な接線を引き、このときの接点が、求める P である。AB と平行な接線を、$y=3x+k$ とすると

$$4-x^2=3x+k \quad x^2+3x+k-4=0 \quad D=9-4(k-4)=25-4k=0 \quad \therefore k=\frac{25}{4}$$

このとき　$x^2+3x+\dfrac{9}{4}=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2=0$　$x=-\dfrac{3}{2}$　$\therefore p=-\dfrac{3}{2}$　……(答)

(ii)

放物線と $y=3x+k$ が、2点 $C,\ D$ で交わるとき　$D=25-4k>0$　$k<\dfrac{25}{4}$

$k<\dfrac{25}{4}$ のとき、$x^2+3x+k-4=0$ の相違なる2解を、$c,\ d$ とすると

解と係数の関係より　$c+d=-3$　$\therefore \dfrac{c+d}{2}=-\dfrac{3}{2}$

CD の中点の x 座標が p に等しいから、$x=p$ によって二等分される。(証明終)

(iii)

放物線と AB で囲まれた部分の面積は

$$\int_{-4}^{1}\left\{(4-x^2)-3x\right\}dx=-\int_{-4}^{1}(x+4)(x-1)dx=\frac{(1+4)^3}{6}=\frac{125}{6}$$

放物線と AB で囲まれた部分のうち、$x=p$ から右側の部分の面積は

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\left\{(4-x^2)-3x\right\}dx=\int_{-\frac{3}{2}}^{1}(-x^2-3x+4)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-\frac{3}{2}}^{1}$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4-\frac{9}{8}+\frac{27}{8}+6=10-\frac{11}{6}+\frac{9}{4}=\frac{120-22+27}{12}=\frac{125}{12}$$

したがって、$x=p$ によって二等分される。(証明終)

(注)

(iii)は、(ii)を利用した解答も可能。以下に略解を示す。

$0\leqq k\leqq\dfrac{25}{4}$ において、2点 $C,\ D$ の x 座標の差を $L(k)$ とする。

CD は常に $x=p$ によって二等分されるから、$x=p$ の両側の面積は、

いずれも $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{25}{4}}L(k)\,dk$ で与えられ、等しい。なお、$L(k)=\sqrt{25-4k}$ である。