1978年京大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

(i)

$X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$とすると、ケーリー・ハミルトンの定理より　$X^2=(p+s)X-(ps-qr)E$

$$X^3=(p+s)X^2-(ps-qr)X=(p+s)^2X-(p+s)(ps-qr)E-(ps-qr)X$$
$$=\left\{(p+s)^2-(ps-qr)\right\}X-(p+s)(ps-qr)E=R(\theta)$$
$$\cos\theta=p\left\{(p+s)^2-(ps-qr)\right\}-(p+s)(ps-qr)=s\left\{(p+s)^2-(ps-qr)\right\}-(p+s)(ps-qr)$$
$$\sin\theta=-q\left\{(p+s)^2-(ps-qr)\right\}=r\left\{(p+s)^2-(ps-qr)\right\}$$

ここで、$ps-qr=0$とすると

$$\cos\theta=p(p+s)^2=s(p+s)^2,\ \sin\theta=-q(p+s)^2=r(p+s)^2$$

$\cos\theta=\sin\theta=0$にはならないので、$(p+s)^2>0$であるから　$\therefore s=p,\ q=-r$

ところが、$ps-qr=p^2+r^2=0$より、$p=q=r=s=0$となり、$\cos\theta=\sin\theta=0$となるので、不適。

したがって、$ps-qr\neq 0$であり、Xは逆行列を持つ。（証明終）

$\theta\neq n\pi$のとき　$(p-s)\left\{(p+s)^2-(ps-qr)\right\}=0,\ (q+r)\left\{(p+s)^2-(ps-qr)\right\}=0$

$(p+s)^2=ps-qr$のとき

$X^3=-(p+s)^3E=R(\theta)$となり、少なくとも$\sin\theta=0$である必要があるが、$\theta\neq n\pi$より不適。

$(p+s)^2\neq ps-qr$であるから　$s=p,\ q=-r$　$X=\begin{pmatrix} p & -r \\ r & p \end{pmatrix}$

$$R(\theta)X=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -r \\ r & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p\cos\theta-r\sin\theta & -r\cos\theta-p\sin\theta \\ r\cos\theta+p\sin\theta & p\cos\theta-r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$XR(\theta)=\begin{pmatrix} p & -r \\ r & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p\cos\theta-r\sin\theta & -r\cos\theta-p\sin\theta \\ r\cos\theta+p\sin\theta & p\cos\theta-r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(\theta)X=XR(\theta)$$

$\theta=n\pi$のとき　$R(\theta)=(-1)^nE$であるから　$\therefore R(\theta)X=XR(\theta)$

以上により、いずれにしても、$R(\theta)X=XR(\theta)$が示された。（証明終）

(ii)

$$X=R(\alpha)T=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos\alpha & b\cos\alpha-c\sin\alpha \\ a\sin\alpha & c\cos\alpha+b\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$R(\theta)X=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos\alpha & b\cos\alpha-c\sin\alpha \\ a\sin\alpha & c\cos\alpha+b\sin\alpha \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\alpha-a\sin\theta\sin\alpha & b\cos\theta\cos\alpha-c\cos\theta\sin\alpha-c\sin\theta\cos\alpha-b\sin\theta\sin\alpha \\ a\sin\theta\cos\alpha+a\cos\theta\sin\alpha & b\sin\theta\cos\alpha-c\sin\theta\sin\alpha+c\cos\theta\cos\alpha+b\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$XR(\theta)=\begin{pmatrix} a\cos\alpha & b\cos\alpha-c\sin\alpha \\ a\sin\alpha & c\cos\alpha+b\sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\alpha+b\sin\theta\cos\alpha-c\sin\theta\sin\alpha & -a\sin\theta\cos\alpha+b\cos\theta\cos\alpha-c\cos\theta\sin\alpha \\ a\cos\theta\sin\alpha+c\sin\theta\cos\alpha+b\sin\theta\sin\alpha & -a\sin\theta\sin\alpha+c\cos\theta\cos\alpha+b\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$R(\theta)X = XR(\theta)$ より

$$a\cos\theta\cos\alpha - a\sin\theta\sin\alpha = a\cos\theta\cos\alpha + b\sin\theta\cos\alpha - c\sin\theta\sin\alpha$$
$$b\cos\theta\cos\alpha - c\cos\theta\sin\alpha - c\sin\theta\cos\alpha - b\sin\theta\sin\alpha = -a\sin\theta\cos\alpha + b\cos\theta\cos\alpha - c\cos\theta\sin\alpha$$
$$a\sin\theta\cos\alpha + a\cos\theta\sin\alpha = a\cos\theta\sin\alpha + c\sin\theta\cos\alpha + b\sin\theta\sin\alpha$$
$$b\sin\theta\cos\alpha - c\sin\theta\sin\alpha + c\cos\theta\cos\alpha + b\cos\theta\sin\alpha = -a\sin\theta\sin\alpha + c\cos\theta\cos\alpha + b\cos\theta\sin\alpha$$

整理すると、結局

$$\sin\theta\{b\cos\alpha + (a-c)\sin\alpha\} = 0,\ \sin\theta\{b\sin\alpha + (c-a)\cos\alpha\} = 0$$

$\theta \neq n\pi$ であるから $\sin\theta \neq 0$ であり、任意の α について成立するには　$\therefore a = c,\ b = 0$　（証明終）

（iii）

$X = R(\alpha)T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha & b\cos\alpha - c\sin\alpha \\ a\sin\alpha & c\cos\alpha + b\sin\alpha \end{pmatrix}$ のとき

$$\det X = a\cos\alpha(c\cos\alpha + b\sin\alpha) - (b\cos\alpha - c\sin\alpha)a\sin\alpha = ac(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = ac$$

X が逆行列を持つとき、$ac \neq 0$ であるから、$a \neq 0$ かつ $c \neq 0$ でなければならない。

今、逆行列を持つ任意の行列 $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ が、$X = R(\alpha)T$ と表せて、$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ $(a > 0,\ c \neq 0)$ とする。

両辺の右から $T^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ をかけると　$XT^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} pc & -pb + qa \\ rc & -rb + sa \end{pmatrix}$

XT^{-1} は $R(\alpha)$ の形をしているので

$$XT^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = R(\alpha)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{p^2 + r^2}{a^2} = 1 \quad a^2 = p^2 + r^2 \quad \therefore a = \sqrt{p^2 + r^2}$$

$pc = -rb + sa,\ rc = pb - qa$ より　$\therefore b = \dfrac{rs + pq}{a},\ c = \dfrac{ps - qr}{a}$

以上により、任意の $ps - qr \neq 0$ である行列 $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対し、

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + r^2}},\ \sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{p^2 + r^2}},\ a = \sqrt{p^2 + r^2},\ b = \frac{rs + pq}{\sqrt{p^2 + r^2}},\ c = \frac{ps - qr}{\sqrt{p^2 + r^2}}$$

とすれば、$X = R(\alpha)T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ の形に表される。（証明終）

（iv）

上記の議論により、$\theta \neq n\pi$ のとき、$X^3 = R(\theta)$ を満たす X は $X = a\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $(a > 0)$ と表せるから、

$$X^3 = a^3\begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix} = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \cos\theta = a^3\cos 3\alpha,\ \sin\theta = a^3\sin 3\alpha$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = a^6(\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha) = a^6 = 1$ より　$\therefore a = 1$

$\cos\theta = \cos 3\alpha,\ \sin\theta = \sin 3\alpha$ より　$3\alpha = \theta + 2n\pi$　$\alpha = \dfrac{\theta}{3} + \dfrac{2n\pi}{3}$

このうち、$\cos\alpha, \sin\alpha$ の組が相違なるものは　$\therefore \alpha = \dfrac{\theta}{3}, \dfrac{\theta}{3}+\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\theta}{3}+\dfrac{4\pi}{3}$　したがって、X は 3 個存在する。

$\theta = n\pi$ のとき　$R(\theta) = (-1)^n E$ であるから

$$X^3 = \left\{(p+s)^2 - (ps-qr)\right\}X - (p+s)(ps-qr)E = (-1)^n E$$

$$\left\{(p+s)^2 - (ps-qr)\right\}X = \left\{(p+s)(ps-qr) + (-1)^n\right\}E$$

$(p+s)^2 = ps - qr$ とすると

n が奇数のとき　$(p+s)^3 - 1 = 0$　$\therefore p+s=1$

例えば、$p=1,\ s=0$ とすると、$qr=-1$ であり、$r=-\dfrac{1}{q}$ とおける。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & q \\ -\frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix} \text{とすると}\quad X^2 = \begin{pmatrix} 1 & q \\ -\frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & q \\ -\frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\frac{1}{q} & -1 \end{pmatrix}\quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\frac{1}{q} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & q \\ -\frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

確かに $X^3 = -E$ を満たし、q は任意であるから、このような行列は無限に存在する。

n が偶数のとき　$(p+s)^3 + 1 = 0$　$\therefore p+s=-1$

例えば、$p=-1,\ s=0$ とすると、$qr=-1$ であり、$r=-\dfrac{1}{q}$ とおける。

$$X = \begin{pmatrix} -1 & q \\ -\frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix} \text{とすると}\quad X^2 = \begin{pmatrix} -1 & q \\ -\frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & q \\ -\frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ \frac{1}{q} & -1 \end{pmatrix}\quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ \frac{1}{q} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & q \\ -\frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

確かに $X^3 = E$ を満たし、q は任意であるから、このような行列は無限に存在する。

以上により、$\theta \neq n\pi$ であれば X は 3 個存在し、$\theta = n\pi$ であれば X は無限に存在する。（証明終）

（注）

当然ながら、$\theta = n\pi$ のときも、$X = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ の形の X が 3 つ存在する。

n が奇数のとき　$\alpha = \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5\pi}{3}$　n が偶数のとき　$\alpha = 0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$