1979 年京大文 $\boxed{1}$

6 点を A_i, A_j, A_k と A_l, A_m, A_n に分けて、各点の原点 O を起点とした位置ベクトルを考える。
自然数 $i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n$ には、1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかが、重複なく割り当てられているとする。
A_i, A_j, A_k がなす三角形と、A_l, A_m, A_n がなす三角形の重心を、それぞれ G_1, G_2 とすると

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}+\overrightarrow{OA_k}}{3},\ \overrightarrow{OG_2}=\frac{\overrightarrow{OA_l}+\overrightarrow{OA_m}+\overrightarrow{OA_n}}{3}$$

G_1, G_2 を通る直線上の点 P は、実数 t を用いて、$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OG_1}+t\overrightarrow{OG_2}$ と表される。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1-t}{3}(\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}+\overrightarrow{OA_k})+\frac{t}{3}(\overrightarrow{OA_l}+\overrightarrow{OA_m}+\overrightarrow{OA_n})$$

ここで、$t=\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}+\overrightarrow{OA_k}+\overrightarrow{OA_l}+\overrightarrow{OA_m}+\overrightarrow{OA_n}}{6}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_6}}{6}$$

$\dfrac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_6}}{6}$ は、自然数 $i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n$ の割り当て方によらない定点である。
したがって、G_1, G_2 を通る直線は、3 点の選び方に無関係な定点を通る。（証明終）

※理系 $\boxed{5}$（ii）の類題である。