1979年京大理 $\boxed{1}$

（i）

$P_1(x)=x+a$ とすると、$P_1(x)C=Cx+Ca$ であり、奇関数部分は除いてよいから

$$\int_{-1}^{1}P_1(x)Cdx=2Ca\int_0^1 dx=2Ca\big[x\big]_0^1=2Ca=0$$

任意の C について成立するには、$a=0$ であるから　$\therefore P_1(x)=x$ ……（答）

（ii）

$P_2(x)=x^2+ax+b,\ f(x)=px+q$ とすると

$$P_2(x)f(x)=(x^2+ax+b)(px+q)=px^3+(ap+q)x^2+(aq+bp)x+bq$$

であり、奇関数部分は除いてよいから

$$\int_{-1}^{1}P_2(x)f(x)dx=2\int_0^1\left\{(ap+q)x^2+bq\right\}dx=2\left[\frac{ap+q}{3}x^3+bqx\right]_0^1=\frac{2}{3}(ap+q)+2bq=\frac{2}{3}ap+2\left(b+\frac{1}{3}\right)q=0$$

任意の $p,\ q$ について成立するには　$\frac{2}{3}a=0,\ b+\frac{1}{3}=0$　$a=0,\ b=-\frac{1}{3}$　$\therefore P_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$ ……（答）

（iii）

$P_3(x)=x^3+ax^2+bx+c,\ f(x)=px^2+qx+r$ とすると

$$\begin{aligned}P_3(x)f(x)&=(x^3+ax^2+bx+c)(px^2+qx+r)\\&=px^5+(ap+q)x^4+(aq+bp+r)x^3+(ar+bq+cp)x^2+(br+cp)x+cr\end{aligned}$$

であり、奇関数部分は除いてよいから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_3(x)f(x)dx&=2\int_0^1\left\{(ap+q)x^4+(ar+bq+cp)x^2+cr\right\}dx=2\left[\frac{ap+q}{5}x^5+\frac{ar+bq+cp}{3}x^3+crx\right]_0^1\\&=\frac{2}{5}(ap+q)+\frac{2}{3}(ar+bq+cp)+2cr=2\left(\frac{1}{5}a+\frac{1}{3}c\right)p+2\left(\frac{1}{3}b+\frac{1}{5}\right)q+2\left(\frac{1}{3}a+c\right)r=0\end{aligned}$$

任意の $p,\ q,\ r$ について成立するには　$\frac{1}{5}a+\frac{1}{3}c=0,\ \frac{1}{3}b+\frac{1}{5}=0,\ \frac{1}{3}a+c=0$　$a=c=0,\ b=-\frac{3}{5}$

$\therefore P_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$ ……（答）