1979年京大理 $\boxed{3}$

（i）

$X=\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ とおくと　$X^2=t+\dfrac{1}{t}+2$　$t+\dfrac{1}{t}=X^2-2$

相加平均・相乗平均の関係より　$X \geqq 2\sqrt{\sqrt{t}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t}}}=2$　等号成立は、$\sqrt{t}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$、$t=1$のとき。

$f(t)=X+\sqrt{X^2-1}$ であり、$X \geqq 2$ において単調増加であるのは明らかであるから、

$f(t)$ の最小値は　$2+\sqrt{2^2-1}=2+\sqrt{3}$

一方、$g(t)=X-\sqrt{X^2-1}=\dfrac{1}{X+\sqrt{X^2-1}}=\dfrac{1}{f(t)}$ であるから、$g(t)$ は $f(t)$ が最小のとき最大となる。

$g(t)$ の最大値は　$\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$　以上により、示された。（証明終）

（ii）

$c+a>b$ より　$x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2}>p\sqrt{xy}$

両辺を $\sqrt{xy}$ で割ると　$p<\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1}=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\dfrac{y}{x}$ は任意の正の値を取るから、p が $f(t)$ の最小値より小さければよい。　$\therefore p<2+\sqrt{3}$ ——①

$a+b>c$ より　$\sqrt{x^2+xy+y^2}+p\sqrt{xy}>x+y$　$p\sqrt{xy}>x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}$

両辺を $\sqrt{xy}$ で割ると　$p>\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1}=g\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\dfrac{y}{x}$ は任意の正の値を取るから、p が $g(t)$ の最大値より大きければよい。　$\therefore p>2-\sqrt{3}$ ——②

$b+c>a$ より　$p\sqrt{xy}+x+y>\sqrt{x^2+xy+y^2}$　$p\sqrt{xy}>-x-y+\sqrt{x^2+xy+y^2}$

両辺を $\sqrt{xy}$ で割ると　$p>-\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1}=-g\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$f(t)>0$ より $g(t)>0$、$0>-g(t)$ であるから、$p>0$ であれば成立。

以上、①、②より　$\therefore 2-\sqrt{3}<p<2+\sqrt{3}$ ……（答）