1979 年京大理 $\boxed{6}$

(1)

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-at}\begin{pmatrix}\cos bt & -\sin bt\\ \sin bt & \cos bt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=e^{-at}\begin{pmatrix}c_1\cos bt-c_2\sin bt\\ c_1\sin bt+c_2\cos bt\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-ae^{-at}\begin{pmatrix}c_1\cos bt-c_2\sin bt\\ c_1\sin bt+c_2\cos bt\end{pmatrix}+e^{-at}\begin{pmatrix}-c_1b\sin bt-c_2b\cos bt\\ c_1b\cos bt-c_2b\sin bt\end{pmatrix}$$

$$=e^{-at}\begin{pmatrix}-c_1a\cos bt+c_2a\sin bt-c_1b\sin bt-c_2b\cos bt\\ -c_1a\sin bt-c_2a\cos bt+c_1b\cos bt-c_2b\sin bt\end{pmatrix}=e^{-at}\begin{pmatrix}-(c_1a+c_2b)\cos bt+(c_2a-c_1b)\sin bt\\ -(c_2a-c_1b)\cos bt-(c_1a+c_2b)\sin bt\end{pmatrix}$$

$p=c_1a+c_2b,\ q=c_2a-c_1b$ とおくと

$$e^{2at}\overrightarrow{OP}\cdot\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})$$
$$=(c_1\cos bt-c_2\sin bt)(-p\cos bt+q\sin bt)+(c_1\sin bt+c_2\cos bt)(-q\cos bt-p\sin bt)$$
$$=-c_1p\cos^2 bt+(c_2p+c_1q)\sin bt\cos bt-c_2q\sin^2 bt-c_2q\cos^2 bt-(c_2p+c_1q)\sin bt\cos bt-c_1p\sin^2 bt$$
$$=-(c_1p+c_2q)(\sin^2 bt+\cos^2 bt)=-c_1p-c_2q$$
$$=-c_1(c_1a+c_2b)-c_2(c_2a-c_1b)=-({c_1}^2+{c_2}^2)a$$

$$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})=-({c_1}^2+{c_2}^2)ae^{-2at}$$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|=e^{-at}\sqrt{({c_1}^2+{c_2}^2)(\sin^2 bt+\cos^2 bt)+2c_1c_2\sin bt\cos bt-2c_1c_2\sin bt\cos bt}=e^{-at}\sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2}$$

$$\left|\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})\right|=e^{-at}\sqrt{(p^2+q^2)(\sin^2 bt+\cos^2 bt)-2pq\sin bt\cos bt+2pq\sin bt\cos bt}=e^{-at}\sqrt{p^2+q^2}$$
$$=e^{-at}\sqrt{(c_1a+c_2b)^2+(c_2a-c_1b)^2}=e^{-at}\sqrt{({c_1}^2+{c_2}^2)(a^2+b^2)+2c_1c_2ab-2c_1c_2ab}$$
$$=e^{-at}\sqrt{({c_1}^2+{c_2}^2)(a^2+b^2)}$$

これより、$\overrightarrow{OP}$ とその速度ベクトル $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})$ がなす角を θ とすると

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})\right|}=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}>-1$$ t に関わらず一定であるから、θ は一定である。(証明終)

(2)

$\begin{pmatrix}\cos bt & -\sin bt\\ \sin bt & \cos bt\end{pmatrix}$ は角 bt の回転を表すから、動点 P が C を出発してから、第 k 回目に OC と交わるのは、

$t=\frac{2\pi k}{b}$ のときである。

上記より、$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\left|\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})\right|=e^{-at}\sqrt{({c_1}^2+{c_2}^2)(a^2+b^2)}$ がわかっているので

$$\overset{\frown}{C_kC_{k+1}} = \sqrt{({c_1}^2 + {c_2}^2)(a^2 + b^2)}\int_{\frac{2\pi k}{b}}^{\frac{2\pi(k+1)}{b}} e^{-at}dt = \sqrt{({c_1}^2 + {c_2}^2)(a^2 + b^2)}\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_{\frac{2\pi k}{b}}^{\frac{2\pi(k+1)}{b}}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{({c_1}^2 + {c_2}^2)(a^2 + b^2)}(e^{-\frac{2\pi a}{b}k} - e^{-\frac{2\pi a}{b}(k+1)}) = \frac{1}{a}\sqrt{({c_1}^2 + {c_2}^2)(a^2 + b^2)}(1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}})e^{-\frac{2\pi a}{b}k}$$

これより、$\overset{\frown}{C_kC_{k+1}}$は、公比$e^{-\frac{2\pi a}{b}}$の等比数列である。（証明終）