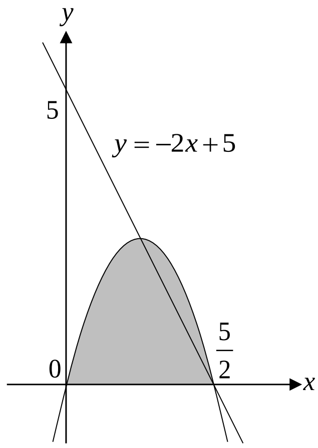
1980 年京大理 $\boxed{2}$



$y = ax^2 + bx = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a}$ の頂点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2}{4a}\right)$ が、

$y = -2x + 5$ 上にあるから

$$-\frac{b^2}{4a} = \frac{b}{a} + 5 \qquad -b^2 = 4b + 20a \qquad \therefore a = -\frac{b^2 + 4b}{20} \quad \text{——①}$$

$a < 0,\ b > 0$ のとき、 $y = ax^2 + bx$ と x 軸とが囲む面積は

$$S = \int_0^{-\frac{b}{a}} (ax^2 + bx)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right]_0^{-\frac{b}{a}} = -\frac{b^3}{3a^2} + \frac{b^3}{2a^2} = \frac{b^3}{6a^2}$$

①を代入して　$S = \dfrac{b^3}{6} \cdot \dfrac{400}{b^2(b+4)^2} = \dfrac{200b}{3(b+4)^2}$　　$f(b) = \dfrac{200b}{3(b+4)^2}$ とすると

$$f'(b) = \frac{200}{3} \cdot \frac{(b+4)^2 - 2b(b+4)}{(b+4)^4} = \frac{200}{3} \cdot \frac{4-b}{(b+4)^3}$$

$f(b)$ の増減は右の通りで、 $b = 4$ のとき極大。

b	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(b)$		＋	0	－
$f(b)$		↗		↘

$f(4) = \dfrac{800}{3 \cdot 64} = \dfrac{25}{6}$ であるから

S の最大値を与える b は $b = 4$ で、そのときの面積は $\dfrac{25}{6}$ ……(答)

なお、このとき $a = -\dfrac{8}{5}$ である。