1980 年京大理 $\boxed{3}$

※2016. 11. 4　訂正しました。

$O'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$は、平面 $x+y+z=1$ 上の点である。

$\overrightarrow{O'A}=\left(l-\frac{1}{3}, m-\frac{1}{3}, n-\frac{1}{3}\right), \overrightarrow{O'B}=\left(m-\frac{1}{3}, n-\frac{1}{3}, l-\frac{1}{3}\right), \overrightarrow{O'C}=\left(n-\frac{1}{3}, l-\frac{1}{3}, m-\frac{1}{3}\right)$ より

$$\left|\overrightarrow{O'A}\right|^2=\left|\overrightarrow{O'B}\right|^2=\left|\overrightarrow{O'C}\right|^2=\left(l-\frac{1}{3}\right)^2+\left(m-\frac{1}{3}\right)^2+\left(n-\frac{1}{3}\right)^2=l^2+m^2+n^2-\frac{2}{3}(l+m+n)+\frac{1}{3}=l^2+m^2+n^2-\frac{1}{3}$$

ここで、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=lm+mn+nl=0$ であるから

$$l^2+m^2+n^2=(l+m+n)^2-2(lm+mn+nl)=1 \quad \therefore \left|\overrightarrow{O'A}\right|^2=\left|\overrightarrow{O'B}\right|^2=\left|\overrightarrow{O'C}\right|^2=\frac{2}{3}$$

A, B, C は、O' を中心とした半径 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ の定円上にあり、(i)が成立。

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=lm+mn+nl=0$ であるから、$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は互いに直交している。

四面体 $OABC$ の体積は　$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{6}(l^2+m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}$

四面体 $OABC$ の体積は一定であり、(ii)が成立。

$m+n+l=1$ より、$m+n=1-l, n+l=1-m, l+m=1-n$ であるから

$$L\left(\frac{1-l}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}\right), M\left(\frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1-l}{2}\right), N\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1-l}{2}, \frac{1-m}{2}\right), P\left(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right), Q\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}, \frac{l}{2}\right), R\left(\frac{n}{2}, \frac{l}{2}, \frac{m}{2}\right)$$

$O''\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ とすると

$$\left|\overrightarrow{O''L}\right|^2=\left|\overrightarrow{O''M}\right|^2=\left|\overrightarrow{O''N}\right|^2=\left|\overrightarrow{O''P}\right|^2=\left|\overrightarrow{O''Q}\right|^2=\left|\overrightarrow{O''R}\right|^2$$
$$=\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}(l^2+m^2+n^2)-\frac{1}{4}(l+m+n)+\frac{3}{16}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{3}{16}$$

L, M, N, P, Q, R は、$O''\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ を中心とした半径 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ の定球面上にあり、(iii)が成立。