1980年京大理 $\boxed{5}$

(i)

集合 S の要素を小さい順に並べたものを $b_1, b_2, \cdots, b_n$ とする。すなわち、$b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$ のとき

2つの要素の差の最大値は $b_n - b_1$、最小値は $b_1 - b_n$ であるから、$b_n - b_1 \leqq b_n$ または $b_1 \leqq b_1 - b_n$ が成立する。

$b_n - b_1 \leqq b_n$ のとき　$\therefore 0 \leqq b_1$　$\therefore 0 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$

$b_1 \leqq b_1 - b_n$ のとき　$\therefore b_n \leqq 0$　$\therefore b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n \leqq 0$

したがって、すべての要素が0以上であるか、すべての要素が0以下であるから、

(イ)または(ロ)が成立する。(証明終)

(ii)

集合 S の要素を小さい順に並べ替えたものが、等差数列になっているかを調べればよい。

並べ替えた $b_1, b_2, \cdots, b_n$ が、$0 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$ を満たしているとき

$b_1 > 0$ のとき

$b_2 - b_1$ は S に含まれ、b_2 より小さいから　$b_2 - b_1 = b_1$　$\therefore b_2 = 2b_1$

$b_n = nb_1$ と予想できる。$n = 1, 2$ のとき成立。$n \leqq k$ のとき、$b_k = kb_1$ と仮定する。

$b_{k+1} - b_k$ は S に含まれ、b_{k+1} より小さいから

$b_{k+1} - b_k = b_i = ib_1 \ (1 \leqq i \leqq k)$　$b_{k+1} = b_k + b_i = (k+i)b_1$

ここで、$b_{k+1} - b_1 = (k+i-1)b_1$ は S に含まれるが、$2 \leqq i$ のとき

$(k+1)b_1 \leqq (k+i-1)b_1 < (k+i)b_1$　$kb_1 < (k+i-1)b_1 < (k+i)b_1$　$\therefore b_k < (k+i-1)b_1 < b_{k+1}$

$2 \leqq i$ のとき、$b_{k+1} - b_1$ が S に含まれない。$i = 1$ に限られるから　$\therefore b_{k+1} = (k+1)b_1$

したがって $n = k+1$ でも成立。以上により、$b_n = nb_1$ が示された。

$b_1 = 0$ のとき　$b_2 > 0$ であるから、同様の議論により、$b_n = (n-1)b_2$ が示される。

並べ替えた $b_1, b_2, \cdots, b_n$ が、$b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n \leqq 0$ を満たしているとき

$b_n < 0$ のとき

$b_{n-1} - b_n$ は S に含まれ、b_{n-1} より大きいから　$b_{n-1} - b_n = b_n$　$\therefore b_{n-1} = 2b_n$

$b_{n-m+1} = mb_n \ (1 \leqq m \leqq n)$ と予想できる。$m = 1, 2$ のとき成立。$m \leqq k$ のとき、$b_{n-k+1} = kb_n$ と仮定する。

$b_{n-k} - b_{n-k+1}$ は S に含まれ、b_{n-k} より大きいから

$b_{n-k} - b_{n-k+1} = b_{n-i+1} = ib_n \ (1 \leqq i \leqq k)$　$b_{n-k} = b_{n-k+1} + b_{n-i+1} = (k+i)b_n$

ここで、$b_{n-k} - b_n = (k+i-1)b_n$ は S に含まれるが、$2 \leqq i$ のとき

$(k+i)b_n < (k+i-1)b_n \leqq (k+1)b_n$　$(k+i)b_n < (k+i-1)b_n < kb_n$　$\therefore b_{n-k} < (k+i-1)b_n < b_{n-k+1}$

$2 \leqq i$ のとき、$b_{n-k} - b_n$ が S に含まれない。$i = 1$ に限られるから　$\therefore b_{n-k} = (k+1)b_1$

したがって $m = k+1$ でも成立。以上により、$b_{n-m+1} = mb_n \ (1 \leqq m \leqq n)$ が示された。

$b_n = 0$ のとき　$b_{n-1} < 0$ であるから、同様の議論により、$b_{n-m} = mb_{n-1} \ (1 \leqq m \leqq n-1)$ が示される。

以上により、等差数列であることが示された。(証明終)