1980 年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad B^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

A または B の乗法の並びに、同じものが二つ以上連続していると、その乗法は$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$になる。

A と B が交互に並んでいる場合を考える。

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\quad ABA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=A\quad ABAB=AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

n を自然数として、$(AB)^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $(AB)^nA=A$ と予想できる。$n=1$のとき成立。

$n=k$ のとき、$(AB)^k=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ と仮定すると　$(AB)^{k+1}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$　$n=k+1$でも成立。

したがって、$(AB)^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$であり、$(AB)^nA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=A$ も成立。

$$BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad BAB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=B\quad BABA=BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

n を自然数として、$(BA)^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $(BA)^nB=B$ と予想できる。$n=1$のとき成立。

$n=k$ のとき、$(BA)^k=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ と仮定すると　$(BA)^{k+1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$　$n=k+1$でも成立。

したがって、$(BA)^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$であり、$(BA)^nB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=B$ も成立。

以上により、求めるすべての行列は　$\therefore\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ ……(答)