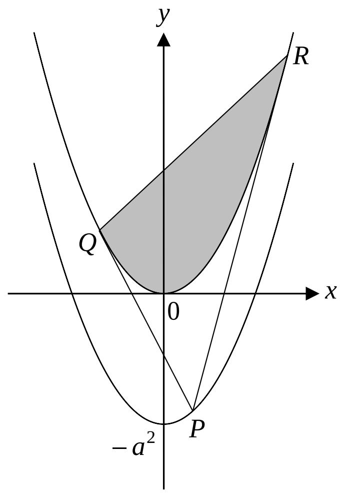
1981 年京大文 $\boxed{3}$

$Q(\alpha,\ \alpha^2),\ R(\beta,\ \beta^2)\ (\alpha<\beta)$ とする。直線 QR の方程式は

$$y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2=(\alpha+\beta)(x-\alpha)+\alpha^2=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

放物線 $y=x^2$ と、線分 QR が囲む部分の面積は



$$S=\int_\alpha^\beta\left\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\right\}dx=-\int_\alpha^\beta\left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\left\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\right\}dx=-\int_\alpha^\beta\left\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\right\}dx$$

$$=-\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}+\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

C 上の点 $(s,\ s^2)$ における接線は、 $y=2s(x-s)+s^2=2sx-s^2$ である。
これが、 C_a 上の点 $(t,\ t^2-a^2)$ を通るとき

$t^2-a^2=2st-s^2 \quad s^2-2ts+(t+a)(t-a)=0 \quad \left\{s-(t-a)\right\}\left\{s-(t+a)\right\}=0$

$\therefore s=t-a,\ t+a$

すなわち、 C_a 上の点 $P(t,\ t^2-a^2)$ から、 C に接線を引いたとき、2 本の接線の接点 $Q,\ R$ の x 座標は、それぞれ $t-a,\ t+a$ で与えられることがわかる。

先に計算した S の式において、 $\alpha=t-a,\ \beta=t+a$ とすれば　$S=\dfrac{(2a)^3}{6}=\dfrac{4}{3}a^3$

これは t によらない値である。すなわち、 P の取り方に無関係であるから、題意は示された。（証明終）

（注）

当時、いわゆる 1/6 公式が知られていたかはわからないので、 S の式を求めておいた。
接点 $Q,\ R$ を具体的に求めなくても、解と係数の関係から S を求めることもできる。