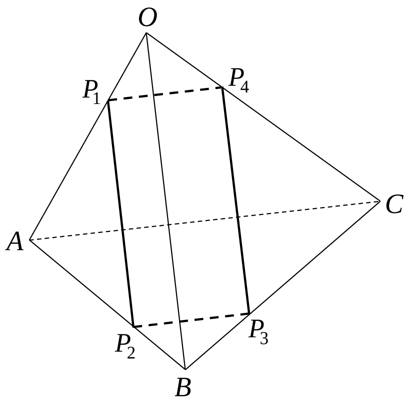
1981 年京大理 $\boxed{2}$

(1)



$\overrightarrow{OP_1}=k\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{BP_2}=l\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BP_3}=m\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{OP_4}=n\overrightarrow{OC}$ であるから

$\overrightarrow{P_1P_4}=\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_1}=-k\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OC}$ ――①

$\overrightarrow{OP_2}=l\overrightarrow{OA}+(1-l)\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OP_3}=(1-m)\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}$ であるから

$\overrightarrow{P_2P_3}=\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_2}=-l\overrightarrow{OA}+(l-m)\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}$ ――②

4 点 $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ をこの順に結んでできる図形が平行四辺形であるとき、$\overrightarrow{P_1P_4}=\overrightarrow{P_2P_3}$ である。

$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから、ベクトルの一意性により

$k=l,\ l-m=0,\ n=m\quad \therefore k=l=m=n$ （証明終）

(2)

平行四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ の 2 本の対角線の交点は、互いの中点であるから、これを L とすると

$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_3})=\frac{k}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1-k}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{OC}$ ――③

次に、$OB,\ AC$ の中点を、それぞれ $M,\ N$ とすると　$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

線分 MN 上の点 T は、$0<t<1$ として、$\overrightarrow{OT}=(1-t)\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{ON}=\frac{t}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{OC}$ と表せる。

したがって、③と比較し、$t=k$ とすれば、L は線分 MN 上にあることがわかる。
以上により、示された。（証明終）

※1998 年理 $\boxed{3}$ とほぼ同一問題。