1981 年京大理 $\boxed{3}$

$x=1$ のとき　$x^m-1 \leqq k(x^{m+1}-1)$ は成立。

$0<x<1$ のとき　$k \leqq \dfrac{x^m-1}{x^{m+1}-1}$　$1<x$ のとき　$k \geqq \dfrac{x^m-1}{x^{m+1}-1}$

$f(x)=\dfrac{x^m-1}{x^{m+1}-1}$ $(x \neq 1)$ とすると

$$f'(x)=\frac{mx^{m-1}(x^{m+1}-1)-(m+1)(x^m-1)x^m}{(x^{m+1}-1)^2}=\frac{x^{m-1}\left\{mx^{m+1}-m-(m+1)(x^{m+1}-x)\right\}}{(x^{m+1}-1)^2}$$
$$=\frac{x^{m-1}(mx^{m+1}-m-mx^{m+1}+mx-x^{m+1}+x)}{(x^{m+1}-1)^2}=\frac{x^{m-1}\left\{-x^{m+1}+(m+1)x-m\right\}}{(x^{m+1}-1)^2}$$

さらに、$g(x)=-x^{m+1}+(m+1)x-m$ とすると　$g'(x)=-(m+1)x^m+(m+1)=(m+1)(1-x^m)$

$0<x<1$ のとき　$g'(x)>0$ であるから、$g(x)$ は単調増加。

　$g(1)=0$ より $g(x)<0$ であるから、$f'(x)<0$ であり、$f(x)$ は単調減少。

$1<x$ のとき　$g'(x)<0$ であるから、$g(x)$ は単調減少。

　$g(1)=0$ より $g(x)<0$ であるから、$f'(x)<0$ であり、$f(x)$ は単調減少。

結局、$f(x)$ は、$0<x<1,\ 1<x$ において単調減少である。

$0<x<1$ のとき、$k \leqq \dfrac{x^m-1}{x^{m+1}-1}$ となる条件は　$k \leqq \displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)$

$1<x$ のとき、$k \geqq \dfrac{x^m-1}{x^{m+1}-1}$ となる条件は　$k \geqq \displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x)$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^{m+1}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+\cdots+x+1}{x^m+\cdots+x+1}=\frac{m}{m+1}$

以上により、題意を満たす k は　$\therefore k=\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^{m+1}-1}=\frac{m}{m+1}$　(証明終)