1982 年京大理 $\boxed{3}$

(1)

4 点 A, B, C, D の、原点 O を基準とした位置ベクトルを考える。

$\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}$, $\overrightarrow{OB_1}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}}{3}$, $\overrightarrow{OC_1}=\dfrac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$, $\overrightarrow{OD_1}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ であり、

直線 AA_1 上の点 P_A は、実数 a を用いて、$\overrightarrow{OP_A}=(1-a)\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OA_1}=(1-a)\overrightarrow{OA}+\dfrac{a}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ と表せる。

同様に、直線 BB_1 上の点 P_B、直線 CC_1 上の点 P_C、直線 DD_1 上の点 P_D は、実数 b, c, d を用いて、それぞれ

$$\overrightarrow{OP_B}=(1-b)\overrightarrow{OB}+\frac{b}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}),\ \overrightarrow{OP_C}=(1-c)\overrightarrow{OC}+\frac{c}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{OP_D}=(1-d)\overrightarrow{OC}+\frac{d}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

と表せる。ここで、$a=b=c=d=\dfrac{3}{4}$ とすれば、$\overrightarrow{OP_A}=\overrightarrow{OP_B}=\overrightarrow{OP_C}=\overrightarrow{OP_D}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$ となる。

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$ は、線分の $AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1$ の、内分点かつ共有点である。

2 点以上を共有することはないから、題意は示された。(証明終)

(2)

実数 t_n を用いて、

$$\overrightarrow{OA_n}=(1-t_n)\overrightarrow{OA}+\frac{t_n}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OB_n}=(1-t_n)\overrightarrow{OB}+\frac{t_n}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}),$$

$$\overrightarrow{OC_n}=(1-t_n)\overrightarrow{OC}+\frac{t_n}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\ \overrightarrow{OD_n}=(1-t_n)\overrightarrow{OD}+\frac{t_n}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

と表せることを、数学的帰納法により示す。

$n=1$ のとき、$t_n=1$ とすれば成立。$n=k$ において成立すると仮定すると

$$\overrightarrow{OA_{k+1}}=\frac{\overrightarrow{OB_k}+\overrightarrow{OC_k}+\overrightarrow{OD_k}}{3}=\frac{t_k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{t_k}{3}\right)(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

$t_{k+1}=1-\dfrac{t_k}{3}$ とすれば、$\overrightarrow{OA_{k+1}}=(1-t_{k+1})\overrightarrow{OA}+\dfrac{t_{k+1}}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ が成立する。同様に、

$$\overrightarrow{OB_{k+1}}=(1-t_{k+1})\overrightarrow{OB}+\frac{t_{k+1}}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}),\ \overrightarrow{OC_{k+1}}=(1-t_{k+1})\overrightarrow{OC}+\frac{t_{k+1}}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{OD_{k+1}}=(1-t_{k+1})\overrightarrow{OD}+\frac{t_{k+1}}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

も導かれる。したがって、$n=k+1$ でも成立し、仮定は示された。

$\overrightarrow{OA_n}=(1-t_n)\overrightarrow{OA}+t_n\overrightarrow{OA_1}$ であるから、点 $A_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ は、直線 AA_1 上の点であり、題意は示された。

(証明終)

なお、点 $B_n,\ C_n,\ D_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ も、それぞれ直線 $BB_1, CC_1,\ DD_1$ 上の点である。

(3)

(2) より、漸化式 $t_{n+1}=1-\frac{t_n}{3}$ が成り立つから、これを解く。

$$t_{n+1}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left(t_n-\frac{3}{4}\right) \quad t_n-\frac{3}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(t_1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} \quad \therefore t_n=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

これより、 $\lim_{n\to\infty} t_n=\frac{3}{4}$ であるから $\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{OA_n}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OA_1}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}=\overrightarrow{OP}$

したがって $\therefore \lim_{n\to\infty}\overline{A_nP}=0$ （証明終）