1983 年京大文 $\boxed{5}$

(1)

$f''(x)=2(1-x)$　　$f'(x)=-x^2+2x+C$　　$f'(0)=0$ より　　$\therefore f'(x)=-x^2+2x$

$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+C$　　$f(0)=0$ より　　$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2$　……(答)

(2)

$y=f(x)$ 上の点 $\left(t,\ -\dfrac{1}{3}t^3+t^2\right)$ における接線の方程式は

$$y=(-t^2+2t)(x-t)-\frac{1}{3}t^3+t^2=(-t^2+2t)x+\frac{2}{3}t^3-t^2$$

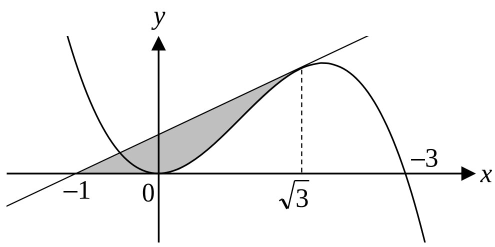
これが $(-1,\ 0)$ を通るとき　$t^2-2t+\dfrac{2}{3}t^3-t^2=\dfrac{2}{3}t^3-2t=\dfrac{2}{3}t(t^2-3)=0$　　$t=0,\ \pm\sqrt{3}$

このうち、接点が C 上にあり、傾きが 0 でないのは、$t=\sqrt{3}$ のとき。
接線 T の方程式は　$y=(-3+2\sqrt{3})(x+1)$

$f'(x)=-x^2+2x=x(2-x)$ より、$f(x)$ の増減は、右の通り。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

x 軸の負の部分と、$C,\ T$ で囲まれた領域を図示すると、
右図の通り。



面積は

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2(-3+2\sqrt{3})-\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}(4+2\sqrt{3})(-3+2\sqrt{3})-\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\left(-\frac{3}{4}+\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$ ……(答)