1983年京大理 $\boxed{1}$

(1)

第1戦で $A$ 校が $B$ 校に勝ったとき、

第2戦で $A$ 校が $C$ 校に勝てば、優勝する。この確率は $pq$ である。

第2戦で $A$ 校が $C$ 校に負け、第3戦で $C$ 校が $B$ 校に負ける確率は、 $p(1-q)\cdot\frac{1}{2}$ である。

この後、第4戦、第5戦で $A$ 校が連勝する確率は、 $p(1-q)\frac{1}{2}\cdot pq$

以下、第 $3k$ 戦まで優勝が決まらず、第 $3k+1$ 戦、第 $3k+2$ 戦で $A$ 校が連勝する確率は $\left\{\frac{p(1-q)}{2}\right\}^k pq$

$0<p<1,\ 0<q<1$ より $0<p(1-q)<1$ であるから、求める確率は

$$\lim_{n\to\infty} pq\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{p(1-q)}{2}\right\}^k=\lim_{n\to\infty} pq\cdot\frac{1-\left\{\frac{p(1-q)}{2}\right\}^{n+1}}{1-\frac{p(1-q)}{2}}=\frac{2pq}{2-p+pq}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

第1戦で $A$ 校が $B$ 校に負けたとき、第2戦で $B$ 校が $C$ 校に負けなければならない。

この後、第3戦、第4戦で $A$ 校が連勝する確率は、$(1-p)\frac{1}{2}qp$ である。

第3戦で $A$ 校が $C$ 校に勝ち、第4戦で $A$ 校が $B$ 校に負け、第5戦で $B$ 校が $C$ 校に負ける確率は、

$(1-p)\frac{1}{2}q(1-p)$ であり、この後、第6戦、第7戦で $A$ 校が連勝する確率は、$(1-p)\frac{1}{2}q(1-p)\frac{1}{2}qp$

以下、第 $3k-1$ 戦まで優勝が決まらず、第 $3k$ 戦、第 $3k+1$ 戦で $A$ 校が連勝する確率は $\left\{\frac{(1-p)q}{2}\right\}^k p$

$0<p<1,\ 0<q<1$ より $0<(1-p)q<1$ であるから、求める確率は

$$\lim_{n\to\infty} p\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(1-p)q}{2}\right\}^k=\lim_{n\to\infty}\frac{pq(1-p)}{2}\cdot\frac{1-\left\{\frac{(1-p)q}{2}\right\}^{n}}{1-\frac{(1-p)q}{2}}=\frac{2pq(1-p)}{2-q+pq}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)

第1戦で $B$ 校が $C$ 校に勝ったとき、

第2戦、第3戦で $A$ 校が連勝する確率は、$\frac{1}{2}pq$ である。

第2戦で $A$ 校が $B$ 校に勝ち、第3戦で $A$ 校が $C$ 校に負け、第4戦で $B$ 校が $C$ 校に勝つ確率は、

$\frac{1}{2}p(1-q)\frac{1}{2}$ であり、この後、第5戦、第6戦で $A$ 校が連勝する確率は、$\frac{1}{2}p(1-q)\frac{1}{2}pq$

以下、第$3k-2$戦まで優勝が決まらず、第$3k-1$戦、第$3k$戦で$A$校が連勝する確率は $\frac{1}{2}\left\{\frac{p(1-q)}{2}\right\}^{k-1}pq$

第 1 戦で$B$校が$C$校に勝ち、$A$校が優勝する確率は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{pq}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{p(1-q)}{2}\right\}^{k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{pq}{2}\cdot\frac{1-\left\{\frac{p(1-q)}{2}\right\}^{n}}{1-\frac{p(1-q)}{2}}=\frac{pq}{2-p+pq}$$

第 1 戦で$B$校が$C$校に負けたとき、

第 2 戦、第 3 戦で$A$校が連勝する確率は、$\frac{1}{2}qp$である。

第 2 戦で$A$校が$C$校に勝ち、第 3 戦で$A$校が$B$校に負け、第 4 戦で$B$校が$C$校に負ける確率は、

$\frac{1}{2}q(1-p)\frac{1}{2}$であり、この後、第 5 戦、第 6 戦で$A$校が連勝する確率は、$\frac{1}{2}q(1-p)\frac{1}{2}qp$

以下、第$3k-2$戦まで優勝が決まらず、第$3k-1$戦、第$3k$戦で$A$校が連勝する確率は $\frac{1}{2}\left\{\frac{(1-p)q}{2}\right\}^{k-1}pq$

第 1 戦で$B$校が$C$校に負け、$A$校が優勝する確率は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{pq}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(1-p)q}{2}\right\}^{k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{pq}{2}\cdot\frac{1-\left\{\frac{(1-p)q}{2}\right\}^{n}}{1-\frac{(1-p)q}{2}}=\frac{pq}{2-q+pq}$$

以上により、第 1 戦で$B$校と$C$校が対戦し、$A$校が優勝する確率は

$$\frac{pq}{2-p+pq}+\frac{pq}{2-q+pq}=\frac{pq(2-q+pq+2-p+pq)}{(2-p+pq)(2-q+pq)}=\frac{pq(4-p-q+2pq)}{(2-p+pq)(2-q+pq)}\quad\cdots\cdots(答)$$