1983年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

(1)

$\vec{p}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$とする。$\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$のとき、$ad-bc=0$となり、不適であるから、$\vec{p}$は零ベクトルではない。

$\vec{p}\cdot\vec{q}=ab+cd=0$より、$\vec{p}$と$\vec{q}$は直交するから、定数$u$を用いて、$\vec{q}=u\begin{pmatrix}-c\\a\end{pmatrix}$と書ける。

$$A=\begin{pmatrix}a & -uc\\ c & ua\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -c\\ c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}=\sqrt{a^2+c^2}\begin{pmatrix}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & -\dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\\ \dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}$$

したがって、$v=\sqrt{a^2+c^2}$, $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$, $\sin\theta=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$とすれば、題意を満たす。(証明終)

(2)

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\left(0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$とする。

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=v\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\cos\alpha\\ uv\sin\alpha\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}v\cos\alpha\\ uv\sin\alpha\end{pmatrix}$としたとき、$\overrightarrow{OQ}$が$x$軸となす角を、$\beta\left(0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$とする。

θは$\overrightarrow{OP}$によらず一定であり、(1)より$a\geqq0,\ c\geqq0$であるから$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$、また$v>0,\ 0<u<1$であるから

$\alpha=0$のとき　$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix}$であるから　$\beta=\alpha=0$　$\therefore\gamma=\theta$

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$のとき　$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}0\\uv\end{pmatrix}$であるから　$\beta=\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore\gamma=\theta$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$のとき　$\tan\beta=u\tan\alpha<\tan\alpha$であるから　$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore\gamma=\theta+\beta-\alpha<\theta$

以上により、γを最大にする$\overrightarrow{OP}$は　$\therefore\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　……(答)