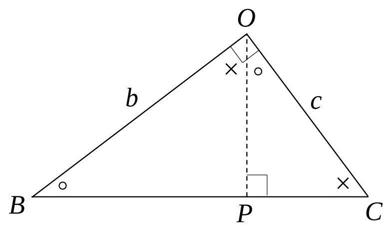
1983年京大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

(1)

△OBCについて考える。$BC=\sqrt{b^2+c^2}$ であるから

△OBC、△POC、△PBOの相似性より

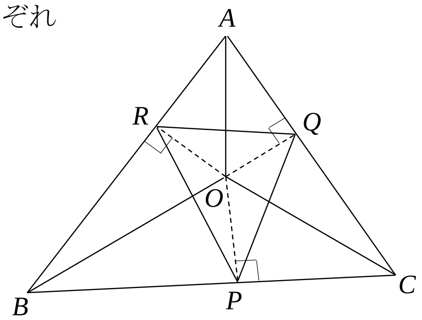


$$\frac{BP}{OB}=\frac{OB}{BC},\ \frac{PC}{OC}=\frac{OC}{BC} \qquad BP=\frac{OB^2}{BC}=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}},\ PC=\frac{OC^2}{BC}=\frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$\therefore BP:PC=b^2:c^2$

同様に、$CQ:QA=c^2:a^2,\ AR:RB=a^2:b^2$ である。

△ABCの面積をSとすると、△AQR、△BRP、△CPQの面積は、それぞれ



$$\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2+a^2}S,\ \frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b^2}{b^2+c^2}S,\ \frac{c^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{c^2}{c^2+a^2}S$$

求める体積比は、△PQRの△ABCに対する面積比に等しいから

$$1-\frac{a^4}{(a^2+b^2)(c^2+a^2)}-\frac{b^4}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}-\frac{c^4}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)-a^4(b^2+c^2)-b^4(c^2+a^2)-c^4(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$=\frac{2a^2b^2c^2+a^4b^2+c^2a^4+b^4c^2+a^2b^4+c^4a^2+b^2c^4-a^4b^2-c^2a^4-b^4c^2-a^2b^4-c^4a^2-b^2c^4}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$=\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$ ……(答)

(2)

相加平均・相乗平均の関係より、$a^2+b^2\geqq 2ab,\ b^2+c^2\geqq 2bc,\ c^2+a^2\geqq 2ca$であるから、辺々かけると

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\geqq 8a^2b^2c^2 \qquad \frac{1}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\leqq\frac{1}{8a^2b^2c^2}$$

$$\therefore \frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\leqq\frac{2a^2b^2c^2}{8a^2b^2c^2}=\frac{1}{4}$$

したがって、四面体$OPQR$の体積は、四面体$OABC$の体積の$\frac{1}{4}$以下である。(証明終)

等号成立は、$a=b=c$のとき。