1984年京大文 $\boxed{4}$

条件（ロ）より　$g'(x)=x+1$　$g(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^2+C$ と表せる。$g(-1)=C,\ g(1)=2+C$ であるから

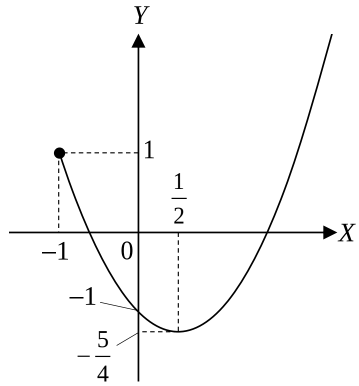
$f(-1)=\{g(-1)\}^2+a=C^2+a=0$ ——①　$f(1)=\{g(1)\}^2+a=(2+C)^2+a=0$ ——②

②−①より　$4C+4=0$　$\therefore C=-1$　$\therefore a=-C^2=-1$

$f(x)=\{g(x)\}^2-1=g(x)+k$ とすると　$k=\{g(x)\}^2-g(x)-1=\left\{g(x)-\dfrac{1}{2}\right\}^2-\dfrac{5}{4}$

$X=g(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-1$ とおくと、$X\geqq -1$ であるから、$X\geqq -1$ の範囲で、

$Y=k$ と $Y=\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ のグラフの共有点の個数を調べる。右図より



$k<-\dfrac{5}{4}$ のとき　共有点は0個。

$k=-\dfrac{5}{4}$ のとき　共有点は $X=\dfrac{1}{2}$ の1個。$X=\dfrac{1}{2}$ を与える x は、$x=-1\pm\sqrt{3}$ の2個。

$-\dfrac{5}{4}<k<1$ のとき　共有点は2個。各 X を与える x は、それぞれ2個。

$k=1$ のとき　共有点は $X=-1,\ 2$ の2個。このうち、$X=-1$ を与える x は、$x=-1$ の1個。
$X=2$ を与える x は $x=-1\pm\sqrt{6}$ の2個。
$1<k$ のとき　共有点は1個。その X を与える x は、2個。

以上をまとめると

$$\therefore \begin{cases} k<-\dfrac{5}{4}\text{のとき} & 0\text{個} \\ k=-\dfrac{5}{4},\ 1<k\text{のとき} & 2\text{個} \\ k=1\text{のとき} & 3\text{個} \\ -\dfrac{5}{4}<k<1\text{のとき} & 4\text{個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

※ここでは2次関数に帰着したが、4次関数の増減を調べてもよい。