

1984 年京大理 ③

(1)

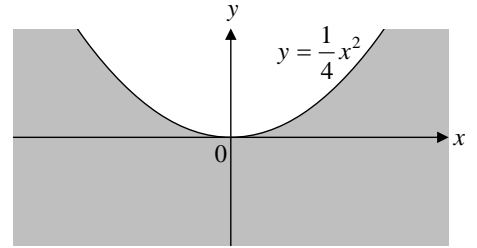
直線 PQ の傾きは $\frac{t - (-t)}{(t+1) - (t-1)} = t$

直線 PQ の式は $y = t(x - t - 1) + t = tx - t^2$

$t^2 - xt + y = 0$ と変形すると、 t に関する 2 次方程式であるから、

実数解を持つ条件より $D = x^2 - 4y \geq 0 \quad \therefore y \leq \frac{1}{4}x^2$

右図の通り。境界線を含む。



(2)

t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、

点 P は、直線 $y = x - 1$ 上を、 $(1, 0)$ から $(2, 1)$ まで動く。

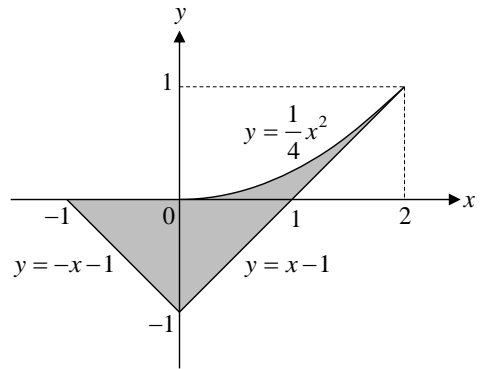
点 Q は、直線 $y = -x - 1$ 上を、 $(-1, 0)$ から $(0, -1)$ まで動く。

また、 $tx - t^2 = t(x - 2t) + t^2$ より、直線 PQ は、

放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点 $(2t, t^2)$ における接線である。

接点 $(2t, t^2)$ は、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上を、 $(0, 0)$ から $(2, 1)$ まで動く。

(1) を考慮すると、 $0 \leq t \leq 1$ において線分 PQ が通過する範囲は、右図の通りである。



面積は $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{4} \int_0^2 x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} \dots\dots$ (答)