1984年京大理 $\boxed{4}$

(1)

$u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}+w\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ であるとき　$w\overrightarrow{OC}=-u\overrightarrow{OA}-v\overrightarrow{OB}$

$w\neq 0$ とすると、$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{u}{w}\overrightarrow{OA}-\dfrac{v}{w}\overrightarrow{OB}$ となり、$\overrightarrow{OC}$ は、$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$ がなす平面と同一平面上にある。

すなわち、O は△ABC が決定する平面上にあるから、不適。　$\therefore w=0$

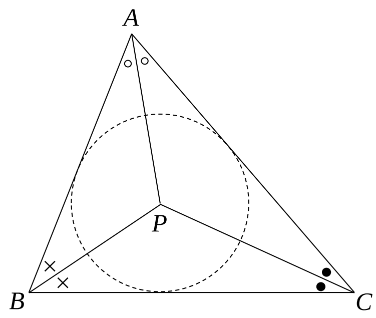
$u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ であるから　$v\overrightarrow{OB}=-u\overrightarrow{OA}$

$v\neq 0$ とすると、$\overrightarrow{OB}=-\dfrac{u}{v}\overrightarrow{OA}$ となり、3点 $O,\ A,\ B$ は同一直線上にある。

すなわち、O は△ABC が決定する平面上にあるから、不適。　$\therefore v=0$

$u\overrightarrow{OA}=\vec{0}$ であるから、結局 $u=0$ も成立。　$\therefore u=v=w=0$　（証明終）

(2)



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$ であり、AP は $\angle BAC$ を二等分するから、

定数 k を用いて、$\overrightarrow{AP}=k\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$ と書ける。

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\left(\frac{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{c}+\frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{b}\right)=\left(1-\frac{k}{c}-\frac{k}{b}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{k}{c}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{b}\overrightarrow{OC}\quad\text{——①}$$

同様に、$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$ であり、定数 l を用いて、$\overrightarrow{BP}=l\left(\dfrac{\overrightarrow{BA}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{BC}}{a}\right)$ と書けるから

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+l\left(\frac{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{c}+\frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}{a}\right)=\frac{l}{c}\overrightarrow{OA}+\left(1-\frac{l}{c}-\frac{l}{a}\right)\overrightarrow{OB}+\frac{l}{a}\overrightarrow{OC}\quad\text{——②}$$

ベクトルの一意性により　$\dfrac{k}{b}=\dfrac{l}{a}$　$l=\dfrac{a}{b}k$　$1-\dfrac{k}{c}-\dfrac{k}{b}=\dfrac{l}{c}$ に代入すると

$$1=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{a}{bc}\right)k=\frac{a+b+c}{bc}k\qquad\therefore k=\frac{bc}{a+b+c}\qquad\therefore l=\frac{ca}{a+b+c}$$

このとき、$\dfrac{k}{c}=1-\dfrac{l}{c}-\dfrac{l}{a}$ も成立。　$\therefore\overrightarrow{OP}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$

したがって　$\therefore u=\dfrac{a}{a+b+c},\ v=\dfrac{b}{a+b+c},\ w=\dfrac{c}{a+b+c}$　……(答)