1984年京大理$\boxed{5}$

(1)

最初につぼの中に入っていた白球の数がi個以上、すなわち$s \geqq i$とする。

$i-1$回目まで白球が取り出され続け、i回目に初めて赤球が取り出されるから

$$P_i = \frac{s}{r+s}\cdot\frac{s-1}{r+s-1}\cdot\cdots\cdot\frac{s-i+2}{r+s-i+2}\cdot\frac{r}{r+s-i+1} = r\cdot\frac{s!(r+s-i)!}{(r+s)!(s-i+1)!}$$

$$\begin{aligned}P_i - P_{i+1} &= r\cdot\frac{s!(r+s-i)!}{(r+s)!(s-i+1)!} - r\cdot\frac{s!(r+s-i-1)!}{(r+s)!(s-i)!} = r\cdot\frac{s!(r+s-i-1)!}{(r+s)!(s-i)!}\left(\frac{r+s-i}{s-i+1}-1\right)\\ &= r\cdot\frac{s!(r+s-i-1)!}{(r+s)!(s-i)!}\cdot\frac{r+s-i-(s-i+1)}{s-i+1} = r(r-1)\cdot\frac{s!(r+s-i-1)!}{(r+s)!(s-i+1)!}\end{aligned}$$

$r \geqq 1$であるから、$P_i - P_{i+1} \geqq 0$、$P_i \geqq P_{i+1}$が成立する。(証明終)

等号成立は、$r=1$のとき。

(2)

Aが勝者となるのは、ちょうど奇数回目に初めて赤球が取り出されたときである。

Aが勝者となる確率をa、Bが勝者となる確率をbとすると

$r>1$のとき　(1)より$P_{2i-1} > P_{2i}$である。

最初の白玉の個数が$s=2m$個のとき　$a = \sum_{i=1}^{m+1} P_{2i-1} > \sum_{i=1}^{m} P_{2i-1} > \sum_{i=1}^{m} P_{2i} = b$　$\therefore a > b$

最初の白玉の個数が$s=2m-1$個のとき　$a = \sum_{i=1}^{m} P_{2i-1} > \sum_{i=1}^{m} P_{2i} = b$　$\therefore a > b$

いずれにしても、$r>1$のとき$a>b$、すなわち$a > \frac{1}{2}$である。

$r=1$のとき　(1)より$P_{2i-1} = P_{2i}$である。

最初の白玉の個数が$s=2m$個のとき　$P_1 = P_2 = \cdots = P_{2m} = P_{2m+1} = \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{s+1}$

$$a = \sum_{i=1}^{m+1} P_{2i-1} = \frac{m+1}{s+1} = \frac{s+2}{2(s+1)} > \frac{1}{2}\qquad b = \sum_{i=1}^{m} P_{2i} = \frac{m}{s+1} = \frac{s}{2(s+1)} < \frac{1}{2}\qquad \therefore a > \frac{1}{2}$$

最初の白玉の個数が$s=2m-1$個のとき　$P_1 = P_2 = \cdots = P_{2m} = \frac{1}{2m} = \frac{1}{s+1}$

$$a = \sum_{i=1}^{m} P_{2i-1} = \frac{m}{s+1} = \frac{s+1}{2(s+1)} = \frac{1}{2}\qquad b = \sum_{i=1}^{m} P_{2i} = \frac{m}{s+1} = \frac{s+1}{2(s+1)} = \frac{1}{2}\qquad \therefore a = \frac{1}{2}$$

以上により、$a \geqq \frac{1}{2}$が示された。(証明終)

$a = \frac{1}{2}$となる条件は、$r=1$かつsが奇数であることである。