1985年京大文 $\boxed{4}$

（i）

P_1における接線の傾きは、$x=x_1$における $f(x)$ の微分係数 $f'(x_1)$ で与えられる。

P_1における接線は、傾きが $f'(x_1)$ で、P_1を通る直線であるから　$g(x)=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$

$h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f'(x_1)(x-x_1)-f(x_1)$ とすると、$h(x_1)=0$ である。

$h'(x)=f'(x)-f'(x_1)$ であるから、$h'(x_1)=0$ である。

今、$h(x)=Q(x)(x-x_1)^2+ax+b$ とおく。$h'(x)=Q'(x)(x-x_1)^2+2Q(x)(x-x_1)+a$ であるから、

$h'(x_1)=0$ より　$h'(x_1)=a=0$　$h(x_1)=0$ より　$h(x_1)=ax_1+b=b=0$　$\therefore a=b=0$

したがって、$h(x)=f(x)-g(x)=Q(x)(x-x_1)^2$ と書けて、$f(x)-g(x)$ は $(x-x_1)^2$ で割り切れる。

同様に、$f(x)-g(x)$ が $(x-x_2)^2$ で割り切れることも示される。（証明終）

（ii）

$f(x)-g(x)$ は、$(x-x_1)^2$ と $(x-x_2)^2$ で割り切れ、$f(x)$ が4次式で、x^4 の係数が1であることから、

結局、$f(x)-g(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2$ である。

解と係数の関係より、$f(x)-g(x)$ の3次の係数は $-2(x_1+x_2)$ であるが、これが0に等しいから

$$x_1+x_2=0 \qquad x_2=-x_1 \qquad \therefore f(x)-g(x)=(x+x_1)^2(x-x_1)^2$$

求める面積は、$S=\left|\int_{-x_1}^{x_1}\{f(x)-g(x)\}dx\right|=\left|\int_{-x_1}^{x_1}(x-x_1)^2(x+x_1)^2dx\right|=2\left|\int_0^{x_1}(x-x_1)^2(x+x_1)^2dx\right|$ で与えられる。

$$\int_0^{x_1}(x-x_1)^2(x+x_1)^2dx$$
$$=\int_0^{x_1}(x-x_1)^2\{(x-x_1)+2x_1\}^2dx=\int_0^{x_1}(x-x_1)^2\left\{(x-x_1)^2+4x_1(x-x_1)+4{x_1}^2\right\}dx$$
$$=\int_0^{x_1}\left\{(x-x_1)^4+4x_1(x-x_1)^3+4{x_1}^2(x-x_1)^2\right\}dx=\left[\frac{(x-x_1)^5}{5}+x_1(x-x_1)^4+4{x_1}^2\frac{(x-x_1)^3}{3}\right]_0^{x_1}$$
$$=\frac{{x_1}^5}{5}-{x_1}^5+\frac{4}{3}{x_1}^5=\frac{8}{15}{x_1}^5$$

したがって　$\therefore S=\dfrac{16}{15}|x_1|^5$　……（答）