1985年京大文 $\boxed{5}$

ゲームが終了するには、最低3回コインを投げるので、 $p_0=1,\ q_0=0$ である。
$(2n+1)$ 回コインを投げて、ゲームが終了しないとき、その時点で到達している点は、 A_1 か A_5 に限られる。
$(2n+1)$ 回コインを投げて、 A_1 に到達している確率を $a_n(1)$ 、 A_5 に到達している確率を $a_n(5)$ とすると

$(2n+1)$ 回コインを投げて、 A_1 に到達しているとき、$(2n+3)$ 回コインを投げた後

確率 $\frac{1}{4}$ で、 $A_1 \to A_0 \to A_5$ と辿って A_5 に到達し、ゲームが終わらない。

確率 $\frac{1}{2}$ で、 $A_1 \to A_0 \to A_1$ か $A_1 \to A_2 \to A_1$ と辿って A_1 に戻り、ゲームが終わらない。

確率 $\frac{1}{4}$ で、 $A_1 \to A_2 \to A_3$ と辿って A_3 に到達し、ゲームが終わる。

$(2n+1)$ 回コインを投げて、 A_5 に到達しているとき、$(2n+3)$ 回コインを投げた後、同様に

確率 $\frac{1}{4}$ で、 $A_5 \to A_0 \to A_1$ と辿って A_1 に到達し、ゲームが終わらない。

確率 $\frac{1}{2}$ で、 $A_5 \to A_0 \to A_5$ か $A_5 \to A_4 \to A_5$ と辿って A_5 に戻り、ゲームが終わらない。

確率 $\frac{1}{4}$ で、 $A_5 \to A_4 \to A_3$ と辿って A_3 に到達し、ゲームが終わる。

$a_{n+1}(1) = \frac{1}{2}a_n(1) + \frac{1}{4}a_n(5)$ ——① $a_{n+1}(5) = \frac{1}{4}a_n(1) + \frac{1}{2}a_n(5)$ ——② $q_{n+1} = \frac{1}{4}a_n(1) + \frac{1}{4}a_n(5)$ ——③

①と②を辺々足すと $a_{n+1}(1) + a_{n+1}(5) = \frac{3}{4}\left\{a_n(1) + a_n(5)\right\}$

$p_n = a_n(1) + a_n(5)$ であるから $p_{n+1} = \frac{3}{4}p_n$ $\therefore p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ $n=0$ でも成立。

③より、 $q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n$ であるから $\therefore q_n = \frac{1}{4}p_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ $(n \geqq 1)$

以上により

$p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 、 $n=0$ のとき $q_n = 0$ 、 $n \geqq 1$ のとき $q_n = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ ……(答)