1985 年京大理 $\boxed{5}$

$P(X=0)=(1-a)(1-b)=1-a-b+ab$、$P(X=1)=a(1-b)+(1-a)b=a+b-2ab$、$P(X=2)=ab$ であるから

(i)

$P(X=0)=1-a-b+ab=(1-p)^2$ ——①　$P(X=1)=a+b-2ab=2p(1-p)$ ——②

$P(X=2)=ab=p^2$ ——③

①、③より　$a+b=1+ab-(1-p)^2=1+p^2-(1-p)^2=2p$

②、③より　$a+b=2p(1-p)+2ab=2p(1-p)+2p^2=2p$

したがって、一致。$a+b=2p,\ ab=p^2$ より、$a,\ b$ は $t^2-2pt+p^2=0$ の解である。

$(t-p)^2=0$ より、$a=b=p$ の 1 通りが存在する。……(答)

(ii)

$P(X=0)=1-a-b+ab=\dfrac{1}{3}$ ——①　$P(X=1)=a+b-2ab=\dfrac{1}{3}$ ——②　$P(X=2)=ab=\dfrac{1}{3}$ ——③

①、③より　$a+b=1+ab-\dfrac{1}{3}=1$　②、③より　$a+b=\dfrac{1}{3}+2ab=1$

したがって、一致。$a+b=1,\ ab=\dfrac{1}{3}$ より、$a,\ b$ は $t^2-t+\dfrac{1}{3}=0$ の解である。

ところが、$t^2-t+\dfrac{1}{3}=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{12}>0$ より、実数解が存在しない。

したがって、一様分布を与える $a,\ b$ の値は存在しない。……(答)