1985年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

座標平面において、$A(x,\ y),\ B\left(-\dfrac{q}{2},\ 0\right),\ C\left(\dfrac{q}{2},\ 0\right)$とおく。

このとき、△ABCの成立条件は、$y\neq 0$である。$\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{q}{2}-x,\ -y\right),\ \overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{q}{2}-x,\ -y\right)$であるから

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{q^2}{4}+x^2+y^2=p \qquad x^2+y^2=p+\frac{q^2}{4} \quad \text{——①}$$

①を満たす、$y\neq 0$である実数の組$(x,\ y)$が存在することが条件である。

$p+\dfrac{q^2}{4}<0$のとき、$x^2+y^2<0$であるから、このような実数の組$(x,\ y)$は存在しない。

$p+\dfrac{q^2}{4}=0$のとき、$x^2+y^2=0$であるから、$(x,\ y)=(0,\ 0)$しかないので、不適。

$p+\dfrac{q^2}{4}>0$のとき、①を満たす実数の組$(x,\ y)$をとることができ、$y\neq 0$である組もとれる。

以上により、必要条件は　$\therefore p+\dfrac{q^2}{4}>0$

逆に、$p+\dfrac{q^2}{4}>0$であるとき、①を満たす、$y\neq 0$である実数の組$(x,\ y)$をとれるから、

求める必要十分条件は　$\therefore p+\dfrac{q^2}{4}>0$ ……(答)