1985年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通　※2018. 4. 6 訂正。

(i)

$b^2-c<0,\ b\neq 0$のとき　$x^2+2bx+c=0$——①　の2根は虚数解である。

$\sqrt{c-b^2}=d$とおくと、$d\neq 0$で、$\alpha=-b+di,\ \beta=-b-di$と表せる。

$\gamma=p+qi=t\alpha+u\beta$とすると　$p+qi=t(-b+di)+u(-b-di)=-b(t+u)+d(t-u)i$

$$p=-b(t+u),\ q=d(t-u)\quad t+u=-\frac{p}{b},\ t-u=\frac{q}{d}\quad \therefore t=\frac{1}{2}\left(-\frac{p}{b}+\frac{q}{d}\right),\ u=-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{b}+\frac{q}{d}\right)$$

したがって、実数を含むいかなる複素数γについても、$\gamma=t\alpha+u\beta$となる実数$t,\ u$が存在する。(証明終)

(ii)

$b\neq 0$のとき

(i)の議論により、①の2根$\alpha,\ \beta$が虚数解であるとき、$f(x)=0$の解は、ある実数$t,\ u$によって、必ず$t\alpha+u\beta$という形に表される。したがって、①は実数解を持たなければならないので

$D/4=b^2-c\geqq 0\quad \therefore c\leqq b^2$

次に、$f(x)=0$が実数解を持つとすると、その解は、①の実数解$\alpha,\ \beta$(重解含む)と、ある実数$t,\ u$によって、必ず$t\alpha+u\beta$という形に表される。したがって、$f(x)=0$は虚数解を持たなければならないので

$D/4=(b-1)^2-(5-c)<0\quad \therefore c<-(b-1)^2+5$

$b=0$のとき　①は$x^2+c=0$となり、$f(x)=x^2-2x+5-c$となる。

$c>0$のとき、①の2根$\alpha,\ \beta$は$\pm\sqrt{c}i$となり、純虚数である。

$t\alpha+u\beta=(t-u)\alpha$は、$t\neq u$であれば純虚数、$t=u$であれば0である。$f(x)=0$が純虚数を解に持つことはないから、$f(x)=0$が0を解に持たないことが条件である。$c\neq 5$であれば題意を満たす。

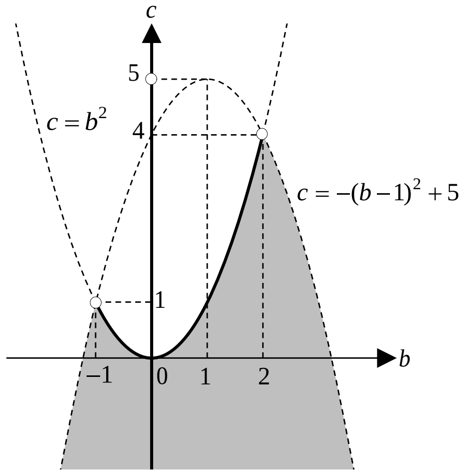
$c=0$のとき、①の根は0のみであるから、$t\alpha+u\beta=0$である。

$f(x)=0$は0を解に持たないから、$c=0$は題意を満たす。

$c<0$のとき、①の2根$\alpha,\ \beta$は$\pm\sqrt{-c}$となり、実数であるから、$t\alpha+u\beta$は実数である。

$f(x)=(x-1)^2+4-c>0$より、$f(x)=0$は虚数解を持つから、任意の$c<0$は題意を満たす。

したがって、$b=0$のとき、$c\neq 5$が条件である。



以上により、集合Dは

$b=0$かつ$c\neq 5$　または　$c\leqq b^2$かつ$c<-(b-1)^2+5$　……(答)

図示すると右図の通り。境界線は実線部のみ含み、

点$(-1,1),\ (2,4),\ (0,5)$は含まない。

※こちらのサイトで、前の解答は誤りと気づきました。