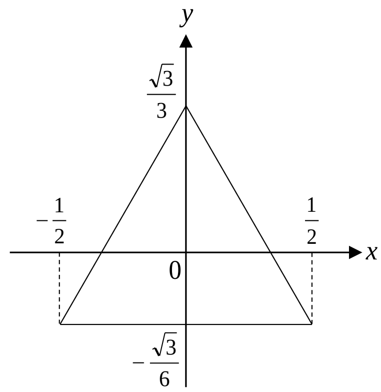
1986年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{4}$共通

(1)

$A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1\right), B\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1\right), C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ とし、動点の速度を1としても、一般性を失わない。

P が A から B に出発し、Q が E から F に出発したきの、時刻 $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ における座標は

$$P\left(t-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1\right), Q\left(\frac{1}{2}(1-t), -\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}t, 0\right)$$



線分 PQ と平面 $z=a\,(0 \leqq a \leqq 1)$ の交点 $R(a)$ は、QP を $a:1-a$ に内分するから

$$a\begin{pmatrix} t-\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 1 \end{pmatrix}+(1-a)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-t) \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-a \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ a \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a-\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ において、$R(a)$ は線分上を動き、その動く長さは、ベクトル $\left(\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a), 0\right)$ の大きさに等しいので

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(1-a)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(9a^2-6a+1)+\frac{3}{4}(a^2-2a+1)}=\sqrt{3a^2-3a+1}$$

対称性により、$z=a$ による V の切り口は、一辺の長さ $\sqrt{3a^2-3a+1}$ の正三角形である。……(答)

(2)

$z=a$ による V の切り口の面積は、$\frac{\sqrt{3}}{4}(3a^2-3a+1)$ であるから、V の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 (3a^2-3a+1)da=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[a^3-\frac{3}{2}a^2+a\right]_0^1=\frac{\sqrt{3}}{8} \quad \cdots\cdots(答)$$