1986年京大理 $\boxed{5}$

(1)

$j \neq i$ のとき

n 個のサイコロの目が、いずれも i 以上 j 以下であり、なおかつ $i,\ j$ の目が少なくとも1個ずつ出ればよい。

n 個のサイコロの目が、いずれも i 以上 j 以下であるような目の組の数は、$(j-i+1)^n$ 個。

このうち、i が1つもない組、j が1つもない組の数は、それぞれ $(j-i)^n$ 個。

i も j も1つもない組の数は、$(j-i-1)^n$ 個。

これより　$\therefore P(M_n = j,\ m_n = i) = \dfrac{(j-i+1)^n - 2(j-i)^n + (j-i-1)^n}{6^n}$

$j = i$ のとき

すべての目が同じであるから　$\therefore P(M_n = j,\ m_n = i) = \dfrac{1}{6^n}$

以上により　$j \neq i$ のとき $\dfrac{(j-i+1)^n - 2(j-i)^n + (j-i-1)^n}{6^n}$、$j = i$ のとき $\dfrac{1}{6^n}$ ……(答)

(2)

$j = i$ のとき　$\therefore \lim_{n\to\infty} P(M_n = j,\ m_n = i) = 0$

$1 \leqq j-i \leqq 4$ のとき

$P(M_n = j,\ m_n = i) = \left(\dfrac{j-i+1}{6}\right)^n - 2\left(\dfrac{j-i}{6}\right)^n + \left(\dfrac{j-i-1}{6}\right)^n$ より　$\therefore \lim_{n\to\infty} P(M_n = j,\ m_n = i) = 0$

$j-i = 5$、すなわち $i = 1,\ j = 6$ のとき

$P(M_n = j,\ m_n = i) = 1 - 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ より　$\therefore \lim_{n\to\infty} P(M_n = 6,\ m_n = 1) = 1$

したがって　$\therefore \lim_{n\to\infty} E\left(\dfrac{M_n}{m_n}\right) = \dfrac{6}{1}\cdot 1 = 6$ ……(答)

同様に、$\lim_{n\to\infty} E\left(\dfrac{{M_n}^2}{{m_n}^2}\right) = \dfrac{6^2}{1^2}\cdot 1 = 36$ であるから

$$\therefore \lim_{n\to\infty} V\left(\frac{M_n}{m_n}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{{M_n}^2}{{m_n}^2}\right) - \lim_{n\to\infty}\left\{E\left(\frac{M_n}{m_n}\right)\right\}^2 = 36 - 36 = 0 \quad \text{……(答)}$$