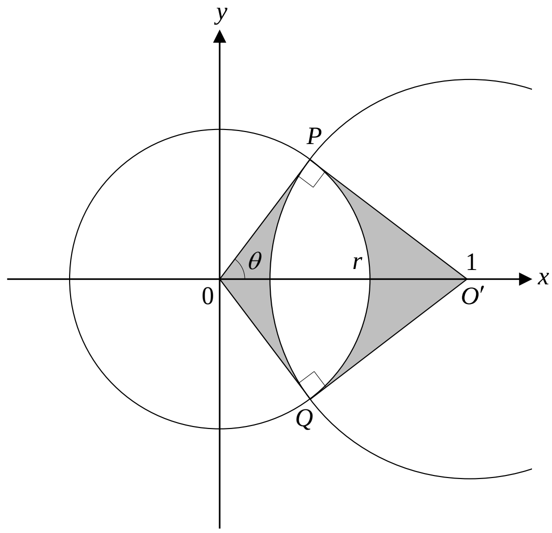
1986 年京大理 $\boxed{6}$



P は第 1 象限の点とし、$P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

$OO'=1$ より、$\cos\theta=r$ である。

円 C' の半径は $\sqrt{1-r^2}=\sin\theta$ であり、$\angle OO'P=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ である。

四辺形 $OPO'Q$ の面積は　$\sin\theta\cos\theta$

扇形 OPQ の面積は　$\dfrac{1}{2}(\cos^2\theta)\cdot 2\theta=\theta\cos^2\theta$

扇形 $O'PQ$ の面積は　$\dfrac{1}{2}(\sin^2\theta)(\pi-2\theta)=\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta$

D'' から $D\cap D'$ を除いた部分の面積は

$$S(\theta)=2\sin\theta\cos\theta-\theta\cos^2\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta=\sin 2\theta-\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-\frac{\pi}{2}\sin^2\theta$$

$$=\sin 2\theta-\theta\cos 2\theta-\frac{\pi}{4}(1-\cos 2\theta)=\sin 2\theta-\theta\cos 2\theta+\frac{\pi}{4}\cos 2\theta-\frac{\pi}{4}$$

$$S'(\theta)=2\cos 2\theta-\cos 2\theta+2\theta\sin 2\theta-\frac{\pi}{2}\sin 2\theta=\cos 2\theta+2\theta\sin 2\theta-\frac{\pi}{2}\sin 2\theta$$

$$S''(\theta)=-2\sin 2\theta+2\sin 2\theta+4\theta\cos 2\theta-\pi\cos 2\theta=4\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\theta$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき　$\theta-\dfrac{\pi}{4}<0,\ \cos 2\theta>0$ であるから　$S''(\theta)<0$　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき　$S''(\theta)=0$

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\theta-\dfrac{\pi}{4}>0,\ \cos 2\theta<0$ であるから　$S''(\theta)<0$

したがって、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において $S''(\theta)\leqq 0$ であり、$S'(\theta)$ は単調減少。

$S'(0)=1,\ S'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\ S'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ より、$S(\theta)$ の増減は右の通り。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S''(\theta)$		$-$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$S(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大であるから、最大値は

$\therefore S\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\dfrac{\pi}{4}$　……(答)