

1987 年京大 B 日程文 1

$f(x) = x^3 - ax^2 + 12x - a - 3$ ,  $g(x) = x^3 - (a+1)x^2 + 16x - a - 6$  とする。

$\frac{f(x)}{g(x)}$  が既約分数でないとき、 $f(x)$  と  $g(x)$  は共通の因数を持つ。

$f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$  は、共通の因数で割り切れるから、 $f(x)$  と  $g(x)$  が共通の因数を持つとすれば、 $x-1$ ,  $x-3$ ,  $(x-1)(x-3)$  のいずれかである。

共通の因数が  $x-1$  であるとき

$$f(1) = 1 - a + 12 - a - 3 = 10 - 2a = 0 \quad \therefore a = 5$$

$$g(1) = 1 - (a+1) + 16 - a - 6 = 10 - 2a = 0 \quad \therefore a = 5$$

このとき  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12x - 8 = (x-1)(x^2 - 4x + 8)$ ,  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 16x - 11 = (x-1)(x^2 - 5x + 11)$

共通の因数が  $x-3$  であるとき

$$f(3) = 27 - 9a + 36 - a - 3 = 60 - 10a = 0 \quad \therefore a = 6$$

$$g(3) = 27 - 9(a+1) + 48 - a - 6 = 60 - 10a = 0 \quad \therefore a = 6$$

このとき  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = (x-3)(x^2 - 3x + 3)$ ,  $g(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x-3)(x-2)^2$

共通の因数が  $(x-1)(x-3)$  になることはない。

以上により  $a=5$  のとき  $\frac{x^2 - 4x + 8}{x^2 - 5x + 11}$ 、 $a=6$  のとき  $\frac{x^2 - 3x + 3}{(x-2)^2}$  …… (答)