1987年京大B日程文$\boxed{2}$

$(x,\ y)$ と $(z,\ w)$ が直交するベクトルであるとき、内積が 0 であるから　$xz+yw=0$ ——①

$(x,\ y)A=(ax+cy,\ bx+dy)$ と $(z,\ w)A=(az+cw,\ bz+dw)$ が直交するベクトルであるとき、①より

$$(ax+cy)(az+cw)+(bx+dy)(bz+dw)$$
$$=a^2xz+ac(xw+yz)+c^2yw+b^2xz+bd(xw+yz)+d^2yw=(a^2+b^2)xz+(ac+bd)(xw+yz)+(c^2+d^2)yw$$
$$=(a^2+b^2-c^2-d^2)xz+(ac+bd)(xw+yz)=0$$

これが①を満たす任意の $(x,\ y)$ と $(z,\ w)$ について成立するには

$a^2+b^2-c^2-d^2=0$ ——②　$ac+bd=0$ ——③

③より　$ac=-bd$　$a^2c^2=b^2d^2$

②の両辺に a^2 をかけると　$a^2(a^2+b^2)-a^2c^2-a^2d^2=a^2(a^2+b^2)-b^2d^2-a^2d^2=(a^2+b^2)(a^2-d^2)=0$

これより、$a^2+b^2=0$ または $a^2-d^2=0$ である。

$a^2+b^2=0$ のとき　$a=b=0$ であるから、②より $c^2+d^2=0$ で、結局　$\therefore a=b=c=d=0$

$d^2=a^2$ のとき　②より　$b^2-c^2=0$　$c^2=b^2$

$a=d=0$ のとき　③は成立。

$d=a\neq 0$ のとき　③より　$a(c+b)=0$　$c=-b$

$d=-a\neq 0$ のとき　③より　$a(c-b)=0$　$c=b$

$\therefore d=\pm a,\ c=\mp b$（複号同順）　$a=d=0$ または $b=c=0$ または $a=b=c=d=0$ の場合も含まれる。

以上により、求める関係は　$\therefore d=\pm a,\ c=\mp b$（複号同順）……(答)

(注)

A が零行列ではないとき、$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とすると

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は、等倍・回転の合成変換を表し、

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は、等倍・回転・x 軸対称移動の合成変換を表す。