1987 年京大文 $\boxed{5}$

(1)

長さ 1 の針金を、長さ t と長さ $1-t$ に切るとする。$0<t<1$ である。

長さ t の方で円を作るとすると、その半径は $\dfrac{t}{2\pi}$ である。

長さ $1-t$ の方で長方形を作ると、隣接する 2 辺の長さは、$\dfrac{1-t}{2}\cdot\dfrac{1}{1+k},\ \dfrac{1-t}{2}\cdot\dfrac{k}{1+k}$ である。

円と長方形の面積の和 $f(t)$ は

$$f(t)=\pi\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2+\frac{(1-t)^2}{4}\cdot\frac{k}{(1+k)^2}=\frac{1}{4\pi}t^2+\frac{k}{4(1+k)^2}t^2-\frac{k}{2(1+k)^2}t+\frac{k}{4(1+k)^2}$$

$$=\frac{(1+k)^2+k\pi}{4\pi(1+k)^2}t^2-\frac{k}{2(1+k)^2}t+\frac{k}{4(1+k)^2}$$

$$4\pi(1+k)^2f(t)=\left\{(1+k)^2+k\pi\right\}t^2-2k\pi t+k\pi=\left\{(1+k)^2+k\pi\right\}\left(t-\frac{k\pi}{(1+k)^2+k\pi}\right)^2-\frac{k^2\pi^2}{(1+k)^2+k\pi}+k\pi$$

$$=\left\{(1+k)^2+k\pi\right\}\left(t-\frac{k\pi}{(1+k)^2+k\pi}\right)^2+\frac{k\pi(1+k)^2}{(1+k)^2+k\pi}$$

$f(t)$ が最小になるのは、$t=\dfrac{k\pi}{(1+k)^2+k\pi}$ のときであるから、

長さ $\dfrac{k\pi}{(1+k)^2+k\pi}$ の方で円を作り、長さ $\dfrac{(1+k)^2}{(1+k)^2+k\pi}$ の方で長方形を作ればよい。……(答)

(2)

(1) より、$4\pi(1+k)^2S(k)=\dfrac{k\pi(1+k)^2}{(1+k)^2+k\pi}$ であるから

$$S(k)=\frac{1}{4}\cdot\frac{k}{(1+k)^2+k\pi}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\dfrac{(1+k)^2}{k}+\pi}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k+\dfrac{1}{k}+2+\pi}$$

相加平均・相乗平均の関係より　$k+\dfrac{1}{k}\geqq 2\sqrt{k\cdot\dfrac{1}{k}}=2$　等号成立は　$k=\dfrac{1}{k}$　$k^2=1$　$k=1$ のとき。

$S(k)$ は、$k+\dfrac{1}{k}$ が最小のとき、最大になるから、$S(k)$ を最大にする k は　$\therefore k=1$ ……(答)