1987年京大理$\boxed{3}$

$a\cos 2\theta + b\cos\theta = a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta = 2a\cos^2\theta + b\cos\theta - a < 1$

$f(t) = 2at^2 + bt - a - 1$ としたとき、$-1 \leqq t \leqq 1$ において、$f(t) < 0$ となる条件を考えればよい。

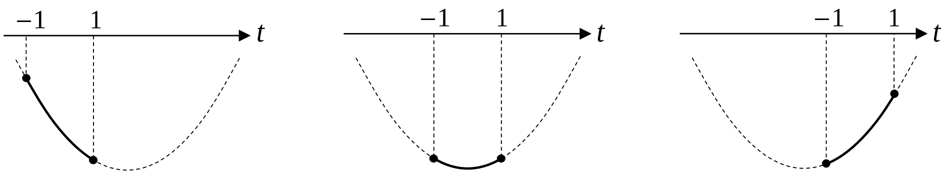
$a = 0$ のとき　$f(t) = bt - 1$　$f(-1) = -b - 1 < 0$ かつ $f(1) = b - 1 < 0$ であればよく、$\therefore -1 < b < 1$ ――①

$a \neq 0$ のとき

$$f(t) = 2at^2 + bt - a - 1 = 2a\left(t^2 + \frac{b}{2a}t\right) - a - 1 = 2a\left\{\left(t + \frac{b}{4a}\right)^2 - \frac{b^2}{16a^2}\right\} - a - 1 = 2a\left(t + \frac{b}{4a}\right)^2 - a - 1 - \frac{b^2}{8a}$$

$a > 0$ のとき　$f(t)$ は下に凸で、$f(-1) < 0$ かつ $f(1) < 0$ であればよい。

$f(-1) = 2a - b - a - 1 = a - b - 1 < 0,\ f(1) = 2a + b - a - 1 = a + b - 1 < 0$　$\therefore b > a - 1, b < -a + 1$ ――②



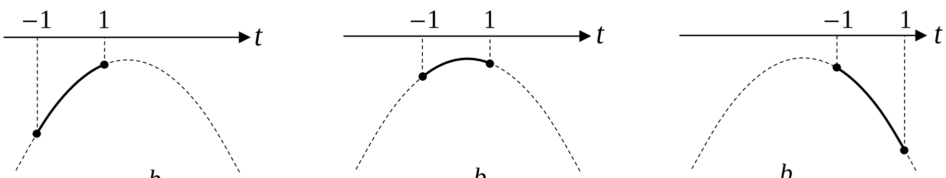
$a < 0$ のとき　$f(t)$ は上に凸で、

$-\dfrac{b}{4a} \geqq 1$　$b \geqq -4a$ のとき　$f(1) < 0$　$\therefore b < -a + 1$ ――③

$-1 < -\dfrac{b}{4a} < 1$　$4a < b < -4a$ のとき　$f\left(-\dfrac{b}{4a}\right) = -a - 1 - \dfrac{b^2}{8a} < 0$

$8a^2 + 8a + b^2 < 0$　$8(a^2 + a) + b^2 < 0$　$\therefore 4\left(a + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{b^2}{2} < 1$ ――④

$-\dfrac{b}{4a} \leqq -1$　$b \leqq 4a$ のとき　$f(-1) < 0$　$\therefore b > a - 1$ ――⑤

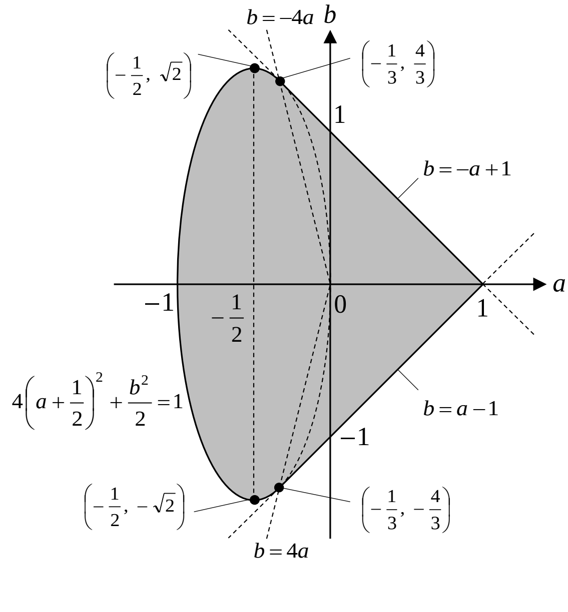


$1 \leqq -\dfrac{b}{4a}$　　$-1 < -\dfrac{b}{4a} < 1$　　$-\dfrac{b}{4a} \leqq -1$

以上①～⑤をまとめると、(a, b) の存在範囲は右図の通り。
境界線を含まない。

直線 $b = a - 1, b = -a + 1$ は、それぞれ $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}\right), \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ で

楕円 $4\left(a + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{b^2}{2} = 1$ に接する。



※同年の東大文$\boxed{3}$に酷似。