1987 年京大理 $\boxed{4}$

(1)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \qquad f'(x)=3x^2+2ax+b$

傾きが m である接線の本数は、 $f'(x)=m$ の実数解の個数に等しいから

$3x^2+2ax+b-m=0 \qquad D/4=a^2-3(b-m)=3m+a^2-3b$

$m<b-\dfrac{a^2}{3}$ のとき $D<0$ 、 $m=b-\dfrac{a^2}{3}$ のとき $D=0$ 、 $m>b-\dfrac{a^2}{3}$ のとき $D>0$ であるから

$m<b-\dfrac{a^2}{3}$ のとき 0 本、 $m=b-\dfrac{a^2}{3}$ のとき 1 本、 $m>b-\dfrac{a^2}{3}$ のとき 2 本 ……(答)

(2)

$m>b-\dfrac{a^2}{3}$ のとき、 $3x^2+2ax+b-m=0$ の相違なる 2 実数解を、 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とする。

P_1 の x 座標を α とすると、 l_1 の式は

$y=(3\alpha^2+2a\alpha+b)(x-\alpha)+\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=(3\alpha^2+2a\alpha+b)x-2\alpha^3-a\alpha^2+c$

$x^3+ax^2+bx+c=(3\alpha^2+2a\alpha+b)x-2\alpha^3-a\alpha^2+c$ とすると

$x^3+ax^2-(3\alpha^2+2a\alpha)x+2\alpha^3+a\alpha^2=0 \qquad (x-\alpha)^2(x+2\alpha+a)=0$

Q_1 の x 座標は、 $-2\alpha-a$ であるから $\quad P_1Q_1=|m(\alpha+2\alpha+a)|=|m(3\alpha+a)|$

同様に、 P_2 の x 座標を β とすると、 $P_2Q_2=|m(3\beta+a)|$

ここで、解と係数の関係より $\quad \alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a \qquad \beta=-\alpha-\dfrac{2}{3}a$

$P_2Q_2=|m(-3\alpha-2a+a)|=|m(-3\alpha-a)|=|m(3\alpha+a)|=P_1Q_1 \qquad \therefore P_1Q_1=P_2Q_2$ (証明終)