

(1)

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)p - (1+a)q \\ -(1-a)p - (1-a)q \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-a)p - (1+a)q \\ -(1-a)p - (1-a)q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)^2 p - (1-a^2)q + (1-a^2)p + (1-a^2)q \\ -(1-a)^2 p + (1-a^2)q + (1-a)^2 p + (1-a)^2 q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-2a+a^2+1-a^2)p \\ (1-a^2+1-2a+a^2)q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-a)p \\ 2(1-a)q \end{pmatrix} = 2(1-a) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore x_2 = (1-a)p - (1+a)q, y_2 = -(1-a)p - (1-a)q, x_3 = 2(1-a)p, y_3 = 2(1-a)q \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2(1-a) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = 2(1-a) \begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 2(1-a) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = 2(1-a) \begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2(1-a) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \{2(1-a)\}^2 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

以下帰納的に、 k を自然数として、 $\begin{pmatrix} x_{2k-1} \\ y_{2k-1} \end{pmatrix} = \{2(1-a)\}^{k-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} = \{2(1-a)\}^{k-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ がわかる。

$$\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2} \text{ より、 } -1 < 2(1-a) < 1 \text{ であるから } \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_{2k-1} \\ y_{2k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \quad \dots\dots (\text{答})$