1988年京大B日程文 $\boxed{1}$

$$\frac{1-x^3}{3}-\frac{1-x^2}{2}\sqrt{x}=\frac{1}{6}(1-x)\left\{2(1+x+x^2)-3(1+x)\sqrt{x}\right\}$$

$0<x<1$ において $\dfrac{1-x^3}{3}-\dfrac{1-x^2}{2}\sqrt{x}>0$ が成立するには、$2(1+x+x^2)-3(1+x)\sqrt{x}>0$ であればよい。

$t=\sqrt{x}$ とおくと $0<t<1$ であり、$2t^4-3t^3+2t^2-3t+2>0$ を示す。

（解答1）

両辺を t^2 で割ると　$2\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)-3\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+2>0$

さらに $X=t+\dfrac{1}{t}$ とおくと、$X^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}+2$ より

$$2(X^2-2)-3X+2=2X^2-3X-2=(2X+1)(X-2)>0$$

$X>2$ であればよい。ここで、$X=t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$ であり、等号は $t=\dfrac{1}{t}$、$t=1$ のとき成立。

$0<t<1$ であるから　$\therefore X>2$　したがって $2X^2-3X-2>0$ が成立し、題意は示された。（証明終）

（解答2）

$f(t)=2t^4-3t^3+2t^2-3t+2$ とすると　$f'(t)=8t^3-9t^2+4t-3=(t-1)(8t^2-t+3)$

$8t^2-t+3=8\left(t-\dfrac{1}{16}\right)^2+\dfrac{95}{32}>0$ より、$0<t<1$ において $f'(t)<0$ であり、単調減少である。

$f(1)=0$ であるから　$\therefore f(t)>0$　したがって題意は示された。（証明終）