1988 年京大 B 日程文$\boxed{2}$

（必要性）

$f(n)=an^3+bn^2+cn$ が、すべての整数 $n$ に対して整数となるとき

$f(1)=a+b+c$ 、 $f(-1)=-a+b-c$ 、 $f(2)=8a+4b+2c$ は、それぞれ整数であるから、

$-3f(1)-f(-1)+f(2)=-3a-3b-3c+a-b+c+8a+4b+2c=6a$ は、整数である。

$4f(1)+2f(-1)-f(2)=4a+4b+4c-2a+2b-2c-8a-4b-2c=-6a+2b$ は、整数である。

$-f(-1)=a-b+c$ は、整数である。

$p,\ q,\ r$ を整数として、 $p=6a,\ q=-6a+2b,\ r=a-b+c$ とおけるので　$\therefore a=\dfrac{p}{6},\ b=\dfrac{p+q}{2},\ c=\dfrac{p}{3}+\dfrac{q}{2}+r$

$$\therefore f(x)=\frac{p}{6}x^3+\frac{p+q}{2}x^2+\left(\frac{p}{3}+\frac{q}{2}+r\right)x=p\frac{x^3+3x^2+2x}{6}+q\frac{x^2+x}{2}+rx=\frac{p}{6}x(x+1)(x+2)+\frac{q}{2}x(x+1)+rx$$

（十分性）

$p,\ q,\ r$ を整数として、 $f(x)=\dfrac{p}{6}x(x+1)(x+2)+\dfrac{q}{2}x(x+1)+rx$ と表されるとき

任意の整数 $n$ に対し、

$n(n+1)(n+2)$ は連続した 3 つの整数の積であり、6 で割り切れるから、 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ は整数である。

$n(n+1)$ は連続した 2 つの整数の積であり、2 で割り切れるから、 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ は整数である。

したがって、すべての整数 $n$ について、 $f(n)$ は整数になる。

以上により示された。（証明終）