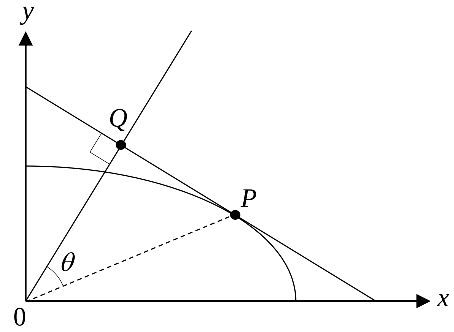
1988年京大B日程文 $\boxed{3}$



対称性より、$P(x_0,\ y_0)$ は、$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の範囲を動くと考える。

$OP,\ OQ$ が x 軸となす角を、それぞれ $\alpha,\ \beta$ $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

とする。

$\alpha = 0$ のとき $\beta = 0$、$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ で、$\theta = 0$ であるから

$\alpha = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\cos\theta = 1$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{y_0}{x_0} = \tan\alpha$ ——①

次に、$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を、x で微分すると　$\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2y}{b^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

P における接線 l の傾きは $-\dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ であるから、l' の傾きは、①より　$\tan\beta = \dfrac{a^2 y_0}{b^2 x_0} = \dfrac{a^2}{b^2}\tan\alpha$ ——②

①、②より　$$\tan\theta = \left|\tan(\alpha - \beta)\right| = \frac{\left|\tan\alpha - \tan\beta\right|}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\left|1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right|\tan\alpha}{1 + \dfrac{a^2}{b^2}\tan^2\alpha} = \frac{\left|b^2 - a^2\right|}{a^2\tan\alpha + \dfrac{b^2}{\tan\alpha}}$$

相加平均・相乗平均の関係より　$a^2\tan\alpha + \dfrac{b^2}{\tan\alpha} \geqq 2\sqrt{a^2\tan\alpha \cdot \dfrac{b^2}{\tan\alpha}} = 2|ab|$

これより、$\tan\theta$ の最大値は $\dfrac{\left|b^2 - a^2\right|}{2|ab|}$ であり、このとき　$a^2\tan\alpha = \dfrac{b^2}{\tan\alpha}$　$\tan\alpha = \left|\dfrac{b}{a}\right|$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{1 + \tan^2\theta}$ より、$\cos^2\theta$ が最小になるのは、$\tan^2\theta$ が最大のときである。

$\cos^2\theta$ の最小値は　$$\frac{1}{1 + \dfrac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2}} = \frac{4a^2b^2}{4a^2b^2 + (a^2 - b^2)^2} = \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

$\cos\theta$ の最小値は　$\therefore \dfrac{2|ab|}{a^2 + b^2}$　……(答)