1988年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{3}$共通

(1)

$f(x)-x=x^2+(a-1)x+b$

$$
\begin{aligned}
g(x)-x=f(f(x))-x&=(x^2+ax+b)^2+a(x^2+ax+b)+b-x\\
&=x^4+a^2x^2+b^2+2ax^3+2abx+2bx^2+ax^2+a^2x+ab+b-x\\
&=x^4+2ax^3+(a^2+a+2b)x^2+(a^2+2ab-1)x+b^2+ab+b\\
&=\{x^2+(a-1)x+b\}\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}
\end{aligned}
$$

したがって、$g(x)-x$は$f(x)-x$で割り切れる。（証明終）

(2)

$x^2+(a+1)x+a+b+1=0$の解であるが、$x^2+(a-1)x+b=0$の解ではない実数$x=p$が存在する。
少なくとも、$x^2+(a+1)x+a+b+1=0$が実数解を持つから

$$D=(a+1)^2-4(a+b+1)=a^2-2a+1-4-4b=(a-1)^2-4-4b\geqq 0 \quad \therefore b\leqq\frac{1}{4}(a-1)^2-1 \text{ ——①}$$

$x^2+(a-1)x+b=0$が実数解を持たないとき

$D=(a-1)^2-4b<0 \quad \therefore b>\frac{1}{4}(a-1)^2$　これは①との共通範囲を持たず、不適。

$x^2+(a-1)x+b=0$と$x^2+(a+1)x+a+b+1=0$の解が完全に一致するとき
$a-1=a+1$、$b=a+b+1$であるが、このような実数a, bは存在しない。

$x^2+(a-1)x+b=0$と$x^2+(a+1)x+a+b+1=0$が、ともに相違なる2実数解を持つとき
少なくとも1つ、$x^2+(a+1)x+a+b+1=0$の解であるが、$x^2+(a-1)x+b=0$の解ではない実数$x=p$が存在する。このとき$b<\frac{1}{4}(a-1)^2$かつ$b<\frac{1}{4}(a-1)^2-1$、結局$b<\frac{1}{4}(a-1)^2-1$である。

$x^2+(a+1)x+a+b+1=0$が重解を持つとき

$$b=\frac{1}{4}(a-1)^2-1 \quad x^2+(a+1)x+a+b+1=x^2+(a+1)x+\frac{1}{4}(a+1)^2=\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2=0 \quad \therefore x=-\frac{a+1}{2}$$

これを$x^2+(a-1)x+b$に代入すると

$$\frac{(a+1)^2}{4}-\frac{a^2-1}{2}+\frac{(a-1)^2}{4}-1=\frac{a^2+2a+1-2a^2+2+a^2-2a+1-4}{4}=0$$

したがって、$x^2+(a+1)x+a+b+1=0$が重解を持つとき、
その重解は$x^2+(a-1)x+b=0$も満たすので、不適。

以上により、求める条件は　$\therefore b<\frac{1}{4}(a-1)^2-1$

図示すると右の通りで、境界線を含まない。