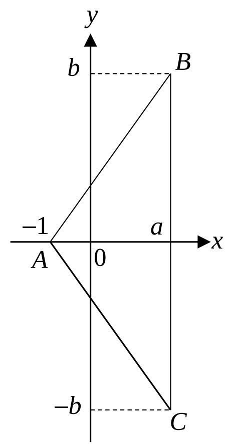
1989年京大後期理(理学部以外) $\boxed{3}$ 文 $\boxed{3}$ 共通



$B(a,\ b),\ C(a,\ -b)\ (a>0,\ b>0)$ とする。

$AB=\sqrt{(a+1)^2+b^2}$ であり、$AD:DB=1:a$ であるから

$$DB=\frac{a}{a+1}AB=\frac{a}{a+1}\sqrt{(a+1)^2+b^2}=2\sqrt{3}$$

$$DB^2=\frac{a^2}{(a+1)^2}\left\{(a+1)^2+b^2\right\}=a^2\left\{1+\frac{b^2}{(a+1)^2}\right\}=12$$

$$1+\frac{b^2}{(a+1)^2}=\frac{12}{a^2}\qquad b^2=\frac{12-a^2}{a^2}(a+1)^2\qquad \therefore b=\frac{a+1}{a}\sqrt{12-a^2}$$

$\triangle ABC$ の面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2b\cdot(a+1)=\dfrac{(a+1)^2}{a}\sqrt{12-a^2}$

$\triangle ABC$ の H に属さない部分の面積は、相似性より $\dfrac{S}{(a+1)^2}$ であるから

$\triangle ABC$ と H の共通部分の面積は　$\left\{1-\dfrac{1}{(a+1)^2}\right\}S=\dfrac{\left\{(a+1)^2-1\right\}}{a}\sqrt{12-a^2}=(a+2)\sqrt{12-a^2}$

$f(a)=(a+2)^2(12-a^2)$ として、$0<a<2\sqrt{3}$ における増減を調べる。

$$f'(a)=2(a+2)(12-a^2)-2a(a+2)^2=2(a+2)(12-a^2-a^2-2a)$$
$$=4(a+2)(6-a-a^2)=4(a+2)(3+a)(2-a)$$

$f(a)$ の増減は右の通りで、$a=2$ において極大。

$f(2)=4^2\cdot 8=8^2\cdot 2$ であるから

求める最大値は　$\therefore 8\sqrt{2}$　……(答)

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(a)$		+	0	−	
$f(a)$		↗		↘	