

1989 年京大後期文 5

$1 \leq k \leq n-1$ に対し、白玉が $n-k$ 個入ったつぼが、 k 個ある。

白玉が $n-k$ 個入ったつぼを選び、さらにその中から白玉を取り出す確率は

$$\frac{2k}{n(n-1)} \cdot \frac{n-k}{n} = \frac{2nk-2k^2}{n^2(n-1)}$$

求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2nk-2k^2}{n^2(n-1)} &= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(2n \sum_{k=1}^{n-1} k - 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) = \frac{1}{n^2(n-1)} \left\{ n^2(n-1) - \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left(n - \frac{2n-1}{3} \right) = \frac{3n-2n+1}{3n} = \frac{n+1}{3n} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$