1989年京大文 $\boxed{2}$

各 a_i $(1 \leqq i \leqq 5)$ について、$a_i \leqq \dfrac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k\right) - a_i}{4}$ が成り立つ。

両辺に $\dfrac{a_i}{4}$ を足すと　$\dfrac{5}{4} a_i \leqq \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k$　$\therefore a_i \leqq \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k$ $(1 \leqq i \leqq 5)$ ――①

ここで、$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq a_5$ とする。

$\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k \leqq a_5$ であり、①より $a_5 \leqq \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k$ であるから　$\therefore a_5 = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k$

$a_5 = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k \leqq \dfrac{4a_4 + a_5}{5}$ より　$5a_5 \leqq 4a_4 + a_5$　$4a_5 \leqq 4a_4$　$\therefore a_5 \leqq a_4$　$a_4 \leqq a_5$ であるから　$\therefore a_4 = a_5$

$a_4 = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k \leqq \dfrac{3a_3 + 2a_4}{5}$ より　$5a_4 \leqq 3a_3 + 2a_4$　$3a_4 \leqq 3a_3$　$\therefore a_4 \leqq a_3$　$a_3 \leqq a_4$ であるから　$\therefore a_3 = a_4$

$a_3 = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k \leqq \dfrac{2a_2 + 3a_3}{5}$ より　$5a_3 \leqq 2a_2 + 3a_3$　$2a_3 \leqq 2a_2$　$\therefore a_3 \leqq a_2$　$a_2 \leqq a_3$ であるから　$\therefore a_2 = a_3$

$a_2 = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k \leqq \dfrac{a_1 + 4a_2}{5}$ より　$5a_2 \leqq a_1 + 4a_2$　$\therefore a_2 \leqq a_1$　$a_1 \leqq a_2$ であるから　$\therefore a_1 = a_2$

以上により　$\therefore a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a$ とすると、$\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = \dfrac{5a}{5} = a$ であるから、確かに①が成立。

求める組は、$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ であるような組すべてである。……(答)

※理系 $\boxed{2}$ は、一般の n について問われているが、考え方は同じ。