1989年京大後期理(理学部以外) $\boxed{1}$ 文 $\boxed{2}$ 共通

(1)

$m=11a+b,\ n=3a+b$ より

$m-n=8a$ は、$m,\ n$ の最大公約数で割り切れる。$11n-3m=8b$ は、$m,\ n$ の最大公約数で割り切れる。

したがって、$m,\ n$ の最大公約数は、$8a,\ 8b$ の公約数である。

$a,\ b$ の最大公約数 d は奇数であり、$m,\ n$ は偶数であるから、

$m,\ n$ の最大公約数は、$2d,\ 4d,\ 8d$ のいずれかである。(証明終)

(2)

$m,\ n$ がともに平方数であると仮定する。$m,\ n$ は偶数であるから、偶数の2乗でなければならない。

$m=(2k)^2=4k^2,\ n=(2l)^2=4l^2\ \ (k>l)$ とおける。

(1)より $a=\dfrac{m-n}{8}$ であり、$a=\dfrac{4(k^2-l^2)}{8}=\dfrac{(k+l)(k-l)}{2}$

ここで、$k,\ l$ の奇偶が異なるとき、$k+l,\ k-l$ はいずれも奇数であり、a が整数にならない。

$k,\ l$ の奇偶が一致するとき、$k+l,\ k-l$ はいずれも偶数であり、$(k+l)(k-l)$ は4の倍数である。

このとき、a は偶数になり、a が奇数であることに矛盾する。

以上により、$m,\ n$ がともに平方数であるという仮定は誤りであり、題意は示された。(証明終)

1989年京大後期理(理学部) $\boxed{1}$

※2016. 3. 24　訂正しました。

$f(x)$ が、$x=a\ (0<a\leqq 1)$ において初めて $f(x)=0$ となったと仮定する。
$0\leqq x\leqq a$ において、$f(x)\geqq 0$ である。
このとき、$0\leqq x\leqq a$ において、$f''(x)>f(x)\geqq 0$ であるから、$0\leqq x\leqq a$ において、$f''(x)>0$ である。
すなわち、$0\leqq x\leqq a$ において、$f'(x)$ は単調増加であり、$f'(a)>f'(0)>0$ である。
すると、$0\leqq x\leqq a$ において、$f'(x)>0$ であるから、$0\leqq x\leqq a$ において、$f(x)$ は単調増加である。
$f(a)>f(0)>0$ でなければならないが、これは $f(a)=0$ に矛盾する。

したがって、仮定は誤りであり、$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)=0$ となる x は存在せず、$f(x)>0$ である。(証明終)