1989年京大後期理 $\boxed{5}$

A 君の得点が $k\,(2\leqq k\leqq n)$ である確率を考える。
大きい方の数が k であるような2枚の取り出し方は、$k-1$ 通り。

2枚の取り出し方の総数は、${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通り。

A 君の得点が k である確率は　$\dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$

A 君の得点が k であるとき

A 君が勝つには、B 君が2回とも $k-1$ 以下の数を引けばよい。A 君が勝つ確率は　$\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^2$

B 君が勝つには、B 君が2回中少なくとも1回、$k+1$ 以上の数を引けばよい。

余事象により、B 君が勝つ確率は　$1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$

$$p=\sum_{k=2}^{n}\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\cdot\left(\frac{k-1}{n}\right)^2=\frac{2}{n^3(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}i^3=\frac{2}{n^3(n-1)}\cdot\frac{n^2(n-1)^2}{4}=\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

$$q=\sum_{k=2}^{n}\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\cdot\frac{n^2-k^2}{n^2}=\frac{2}{n^3(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{n^2i-i(i+1)^2\right\}=\frac{2}{n^3(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{-i^3-2i^2+(n^2-1)i\right\}$$
$$=\frac{2}{n^3(n-1)}\left\{-\frac{n^2(n-1)^2}{4}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}+\frac{n(n-1)(n^2-1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{2}{n^2}\left\{-\frac{n(n-1)}{4}-\frac{2n-1}{3}+\frac{n^2-1}{2}\right\}=\frac{2}{n^2}\cdot\frac{6n^2-6-4(2n-1)-3(n^2-n)}{12}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3n^2-5n-2}{6}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{5}{6n}-\frac{1}{3n^2}$$

$p-q=\dfrac{5}{6n}+\dfrac{1}{3n^2}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{3n^2}+\dfrac{1}{3n}>0$ であるから　$\therefore\ p>q$　……(答)